1996 年京大後期理 $\boxed{2}$

$m=10k+l\ (k \geqq 0,\ 0 \leqq l \leqq 9)$ とおける。このとき

$$m^n+1=(10k+l)^n+1=(10の倍数)+l^n+1$$

であるから、l^n+1 が10の倍数であればよい。すなわち、l^n を10で割った余りが9 である。

l^n は奇数であるから、l は奇数である。

$1^n=1$ であり、5^n の1の位は必ず5 であるから、l は3, 7, 9 に限られる。

同様に、$n=10q+r\ (q \geqq 0,\ r \leqq r \leqq 9)$ とすると、r は3, 7, 9 に限られる。

3^n の1の位は、3, 9, 7, 1, 3, 9, $\cdots$の繰り返しであり、9 になるのは n を 4 で割った余りが 2 のとき。

7^n の1の位は、7, 9, 3, 1, 7, 9, $\cdots$の繰り返しであり、9 になるのは n を 4 で割った余りが 2 のとき。

9^n の1の位は、9, 1, 9, 1, $\cdots$の繰り返しであり、9 になるのは n が奇数のとき。

$10k+3$ という形の自然数は奇数であり、4 で割った余りが 2 になることはない。

同様に、$10k+7$ という形の自然数も、4 で割った余りが 2 になることはない。

$10k+9$ という形の自然数は奇数である。

したがって、m も n も10で割った余りが9 であることが条件であり、例えば　$\therefore m=9,\ n=19$ ……(答)