1996 年京大後期理 $\boxed{4}$

この四面体の 1 つの面は、一辺の長さが1の正三角形である。

この面の各頂点の座標を、$O(0,\ 0,\ 0),\ A(1,\ 0,\ 0),\ B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$とする。

もう 1 つの頂点を$C(p,\ q,\ r)$とし、$OC=1,\ AC=\sqrt{x+y},\ BC=\sqrt{x-y}$とすると

$$OC^2=p^2+q^2+r^2=1 \quad \text{——①}$$
$$AC^2=(p-1)^2+q^2+r^2=p^2+q^2+r^2-2p+1=x+y \quad \text{——②}$$
$$BC^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+r^2=p^2+q^2+r^2-p-\sqrt{3}q+1=x-y \quad \text{——③}$$

①、②より

$$1-2p+1=x+y \qquad 2p=2-x-y \qquad \therefore p=\frac{2-x-y}{2}$$

①、③より

$$1-\frac{2-x-y}{2}-\sqrt{3}q+1=x-y \qquad x+y-2\sqrt{3}q+2=2x-2y \qquad 2\sqrt{3}q=3y-x+2 \qquad \therefore q=\frac{3y-x+2}{2\sqrt{3}}$$

四面体の成立条件は、$r^2=1-(p^2+q^2)>0$であるから、$p^2+q^2<1$である。

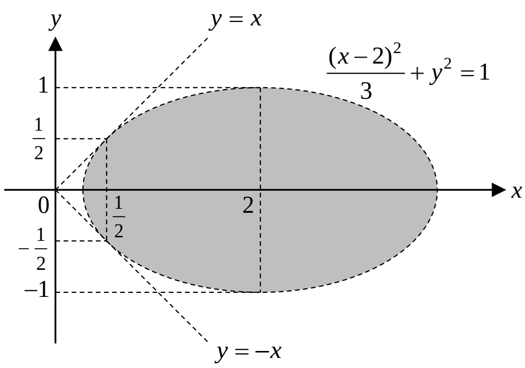
$$p^2+q^2=\frac{(2-x-y)^2}{4}+\frac{(3y-x+2)^2}{12}<1 \qquad 3(2-x-y)^2+(3y-x+2)^2<12$$
$$\begin{aligned}3(2-x-y)^2+(3y-x+2)^2&=3(4+x^2+y^2-4x-4y+2xy)+(9y^2+x^2+4-6xy-4x+12y)\\&=4x^2+12y^2-16x+16=4(x-2)^2+12y^2<12\end{aligned}$$
$$\therefore \frac{(x-2)^2}{3}+y^2<1$$

$\frac{(x-2)^2}{3}+y^2=1$に、$y=x$を代入すると　$(x-2)^2+3x^2=4x^2-4x+4=3 \qquad 4x^2-4x+1=(2x-1)^2=0$

重解を持つから、$y=x$は、楕円$\frac{(x-2)^2}{3}+y^2=1$の接線である。対称性から、$y=-x$も接線である。

$\frac{(x-2)^2}{3}+y^2<1$は、$x+y>0$かつ$x-y>0$に含まれる。

図示すると右図の通りで、境界線を含まない。



（注）

各面の三角形の成立条件を考えるのは、誤りである。

各面が三角形として成立しても、四面体が成立するとは限らない。