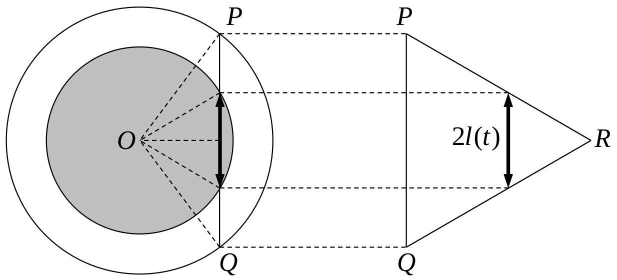
1996 年京大後期理 $\boxed{5}$

(1)

2 点 P, Q が、ともに xy 平面上の単位円上にあるとき、



$\triangle PQR$ を含む平面と、z 軸との距離は $\sqrt{1-a^2}$ であり、

これ以上 z 軸から離れることはできない。

また、$\triangle PQR$ が、平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a)$ によって

切り取られる線分の長さは　$2l(t)=2a\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{3}a}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}a-t)$

で与えられる。$z=t\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a)$ において、$\triangle PQR$ 内の点と z 軸との最長距離は

$$\sqrt{1-a^2+\{l(t)\}^2}=\sqrt{1-a^2+\frac{1}{3}(3a^2-2\sqrt{3}at+t^2)}=\sqrt{\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}at+1}$$

題意の立体の $z=t\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a)$ における断面は、半径 $\sqrt{\dfrac{1}{3}t^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}at+1}$ の円であるから

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{3}a}\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}at+1\right)dt=\pi\left[\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{3}\sqrt{3}at^2+t\right]_0^{\sqrt{3}a}=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a^3-\sqrt{3}a^3+\sqrt{3}a\right)$$

$$=\sqrt{3}\pi\left(-\frac{2}{3}a^3+a\right)$$ ……(答)

(2)

$V(a)=\sqrt{3}\pi\left(-\dfrac{2}{3}a^3+a\right)$ とすると　$V'(a)=\sqrt{3}\pi(-2a^2+1)$

$0<a\leqq 1$ における $V(a)$ の増減は、右の通り。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(a)$		＋	0	−	
$V(a)$		↗		↘	

$V(a)$ は、$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となるから、求める最大値は

$$\sqrt{3}\pi\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{3}\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$$ ……(答)