1996年京大理$\boxed{4}$

(1)

$k=8$ のとき　$a_2=\left[\dfrac{8}{3}\right]=2$　$a_3=\left[\dfrac{2+8}{3}\right]=3$　$a_4=\left[\dfrac{3+8}{3}\right]=3$　以後、$a_k=3$ のとき、$a_{k+1}=\left[\dfrac{3+8}{3}\right]=3$

$\therefore a_1=0,\ a_2=2$ で、$n\geqq 3$ のとき $a_n=3$ ……(答)

$k=9$ のとき　$a_2=\left[\dfrac{9}{3}\right]=3$　$a_3=\left[\dfrac{3+9}{3}\right]=4$　$a_4=\left[\dfrac{4+9}{3}\right]=4$　以後、$a_k=4$ のとき、$a_{k+1}=\left[\dfrac{4+9}{3}\right]=4$

$\therefore a_1=0,\ a_2=3$ で、$n\geqq 3$ のとき $a_n=4$ ……(答)

(2)

数学的帰納法により、$a_n\leqq\dfrac{k-1}{2}$ を示す。$n=1$ のとき、$a_1=0\leqq\dfrac{k-1}{2}$ は成立。

$n=l$ のとき、$a_l\leqq\dfrac{k-1}{2}$ と仮定すると　$a_{l+1}\leqq\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{k-1}{2}+k\right)\right]=\left[\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{6}\right]$

$k=2i-1$ のとき　$\left[\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{6}\right]=\left[i-\dfrac{2}{3}\right]=i-1=\dfrac{k-1}{2}$　$k=2i$ のとき　$\left[\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{6}\right]=\left[i-\dfrac{1}{6}\right]=i-1<\dfrac{k-1}{2}$

いずれにしても $\left[\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{6}\right]\leqq\dfrac{k-1}{2}$ であるから　$\therefore a_{l+1}\leqq\dfrac{k-1}{2}$

したがって、$n=l+1$ でも成立し、$a_n\leqq\dfrac{k-1}{2}$ が示された。次に、$k\geqq 2a_n+1$ であるから

$$a_{n+1}=\left[\frac{a_n+k}{3}\right]\geqq\left[\frac{a_n+(2a_n+1)}{3}\right]=\left[a_n+\frac{1}{3}\right]\geqq a_n\quad\therefore a_n\leqq a_{n+1}$$

以上により示された。(証明終)

(3)

$a_n=a_{n+1}$ のとき　$a_{n+2}=\left[\dfrac{a_{n+1}+k}{3}\right]=\left[\dfrac{a_n+k}{3}\right]=a_{n+1}$　$\therefore a_{n+1}=a_{n+2}$

以下同様に、$a_{n+2}=a_{n+3},\ a_{n+3}=a_{n+4},\cdots$ がわかるので、$n\leqq m$ のとき $a_n=a_m$ である。

$a_n=a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n+k}{3}\right]$ のとき　$a_n>\dfrac{a_n+k}{3}-1$　$a_n>\dfrac{k-3}{2}$

(2)より $a_n\leqq\dfrac{k-1}{2}$ がわかっているので　$\therefore\dfrac{k-3}{2}<a_n\leqq\dfrac{k-1}{2}$ ――①

$k=2i-1$ のとき　$\therefore i-2<a_n\leqq i-1$　これを満たす整数 $a_n$ は　$a_n=i-1=\dfrac{k-1}{2}$

$k=2i$ のとき　$\therefore i-\dfrac{3}{2}<a_n\leqq i-\dfrac{1}{2}$　これを満たす整数 $a_n$ は　$a_n=i-1=\dfrac{k-2}{2}$

したがって　$k$ が奇数のとき $a_n=\dfrac{k-1}{2}$、$k$ が偶数のとき $a_n=\dfrac{k-2}{2}$ ……(答)