1996年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通　※2020. 9. 3 訂正

(1)

$A(1,\ 0),\ X(\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ としても一般性を失わない。$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX} = \cos\theta$ であるから

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} - 2(\cos\theta)\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1-2\cos^2\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} \quad \therefore \left|\overrightarrow{OY}\right|^2 = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$$

したがって、$\left|\overrightarrow{OY}\right| = 1$ が示された。（証明終）

(2)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考える。

$\overrightarrow{OY} = \begin{pmatrix} 1-2\cos^2\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より　$2\cos^2\theta - 1 = 1$ ――①　$2\sin\theta\cos\theta = 0$ ――②

①より　$2\cos^2\theta = 2$　$\cos^2\theta = 1$　$\cos\theta = \pm 1$　$\therefore \theta = 0,\ \pi$

②より　$\sin\theta = 0$ または $\cos\theta = 0$　$\therefore \theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$　①、②を同時に満たすのは　$\therefore \theta = 0,\ \pi$

すなわち、$\overrightarrow{OY} = -\overrightarrow{OA}$ となる点 X は、$\overrightarrow{OX} = \pm\overrightarrow{OA}$ を満たす2点である。……（答）

(3)

(1)より、点 Y は点 X と同じ円周上にあり、$X(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると、$Y(-\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta)$ と表せるから、

点 X が円 C 上を1回まわるとき、点 Y は点 X と逆向きに、円 C 上を2回まわる。（証明終）