

(1)

加法定理により、

$$\cos(m+n)^\circ = \cos m^\circ \cos n^\circ - \sin m^\circ \sin n^\circ, \sin(m+n)^\circ = \sin m^\circ \cos n^\circ + \cos m^\circ \sin n^\circ$$

であるから、 $\cos m^\circ, \cos n^\circ, \sin m^\circ, \sin n^\circ$ がすべて有理数であるとき、 $\cos(m+n)^\circ, \sin(m+n)^\circ$ はともに有理数である。(証明終)

(2)

60の約数をすべて挙げると 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

今、 $\cos 1^\circ, \sin 1^\circ$ はともに有理数であると仮定する。

$$\cos 2^\circ = \cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ, \sin 2^\circ = 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 3^\circ = \cos 2^\circ \cos 1^\circ - \sin 2^\circ \sin 1^\circ, \sin 3^\circ = \sin 2^\circ \cos 1^\circ + \cos 2^\circ \sin 1^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 4^\circ = \cos 3^\circ \cos 1^\circ - \sin 3^\circ \sin 1^\circ, \sin 4^\circ = \sin 3^\circ \cos 1^\circ + \cos 3^\circ \sin 1^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 5^\circ = \cos 4^\circ \cos 1^\circ - \sin 4^\circ \sin 1^\circ, \sin 5^\circ = \sin 4^\circ \cos 1^\circ + \cos 4^\circ \sin 1^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 6^\circ = \cos 5^\circ \cos 1^\circ - \sin 5^\circ \sin 1^\circ, \sin 6^\circ = \sin 5^\circ \cos 1^\circ + \cos 5^\circ \sin 1^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 10^\circ = \cos 6^\circ \cos 4^\circ - \sin 6^\circ \sin 4^\circ, \sin 10^\circ = \sin 6^\circ \cos 4^\circ + \cos 6^\circ \sin 4^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 12^\circ = \cos 10^\circ \cos 2^\circ - \sin 10^\circ \sin 2^\circ, \sin 12^\circ = \sin 10^\circ \cos 2^\circ + \cos 10^\circ \sin 2^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 15^\circ = \cos 12^\circ \cos 3^\circ - \sin 12^\circ \sin 3^\circ, \sin 15^\circ = \sin 12^\circ \cos 3^\circ + \cos 12^\circ \sin 3^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 20^\circ = \cos 15^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 5^\circ, \sin 20^\circ = \sin 15^\circ \cos 5^\circ + \cos 15^\circ \sin 5^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

$$\cos 30^\circ = \cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ, \sin 30^\circ = \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ \text{ は、ともに有理数である。}$$

ところが、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ は有理数であるが、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ は無理数である。

したがって、 $\cos 1^\circ, \sin 1^\circ$ はともに有理数であるという最初の仮定は誤りであり、途中もすべて誤りである。

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ は有理数であるが、 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ は無理数である。

以上により、 n が 60 の約数のとき、 $\cos n^\circ, \sin n^\circ$ のうち少なくとも一方は無理数である。(証明終)

※2006 年後期理系 [6] 文系 [5] 共通と発想は同じ。