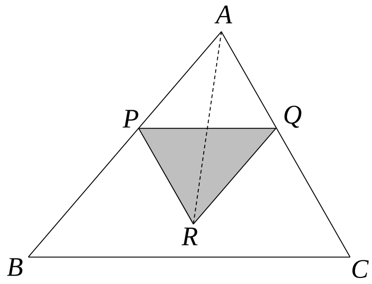
1997 年京大文 $\boxed{3}$

$AP = tAB\ (0 < t < 1)$ とする。このとき、$AQ = tAC$ である。

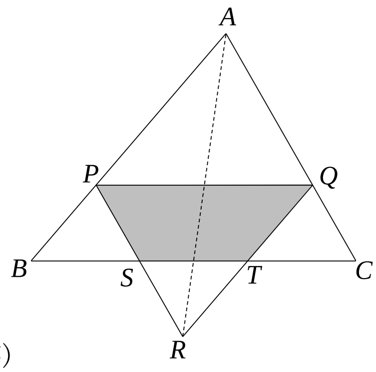
$0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



点 R は△ ABC の内部にあるので、△ PQR と△ ABC の共通部分は、
△ PQR に等しく、その面積は△ APQ に等しい。
△ APQ ∽△ ABC であり、相似比は t であるから、△ APQ の面積は t^2 。

$\therefore S = t^2$

$\dfrac{1}{2} \leqq t < 1$ のとき



線分 $PR,\ QR$ と、BC の交点を、それぞれ $S,\ T$ とする。
$QR = tAB,\ QT = (1-t)AB$ であるから　$TR = \{t - (1-t)\}AB = (2t-1)AB$
△ RTS と△ ABC の相似比は $2t-1$ であるから、△ RTS の面積は $(2t-1)^2$ 。

$$\therefore S = t^2 - (2t-1)^2 = -3t^2 + 4t - 1 = -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

$0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S \leqq \dfrac{1}{4}$ であり、S は $t = \dfrac{2}{3}$ のとき、最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。……(答)