1997 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

(1)

$P(p,\ q)$ とおくと、$\overrightarrow{AP}=(p+2,\ q)$ であるから　$s^2=\overline{AP}^2=(p+2)^2+q^2=p^2+q^2+4p+4$

P は単位円上の点であり、$p^2+q^2=1$ であるから　$s^2=4p+5$　$\therefore p=\dfrac{s^2-5}{4}$ ——①

$\overline{AP}=s,\ \overline{PQ}=\dfrac{3}{s},\ \overline{AQ}=s+\dfrac{3}{s}$ であるから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}\overrightarrow{AP}=\frac{s^2+3}{s^2}\begin{pmatrix}p+2\\ q\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AO}=\frac{s^2+3}{s^2}\begin{pmatrix}p+2\\ q\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{s^2+3}{s^2}(p+2)-2\\ \dfrac{s^2+3}{s^2}q\end{pmatrix}$$

$$t^2=\overline{OQ}^2=\left(\frac{s^2+3}{s^2}\right)^2 s^2-4\cdot\frac{s^2+3}{s^2}(p+2)+4=\frac{(s^2+3)^2}{s^2}-4\cdot\frac{s^2+3}{s^2}(p+2)+4$$

①より、$p+2=\dfrac{s^2+3}{4}$ であるから

$$t^2=\frac{(s^2+3)^2}{s^2}-4\cdot\frac{s^2+3}{s^2}\cdot\frac{s^2+3}{4}+4=4\quad \therefore t=2$$ ……(答)

(2)

(1) より、点 Q は、円 $x^2+y^2=4$ 上を動く。

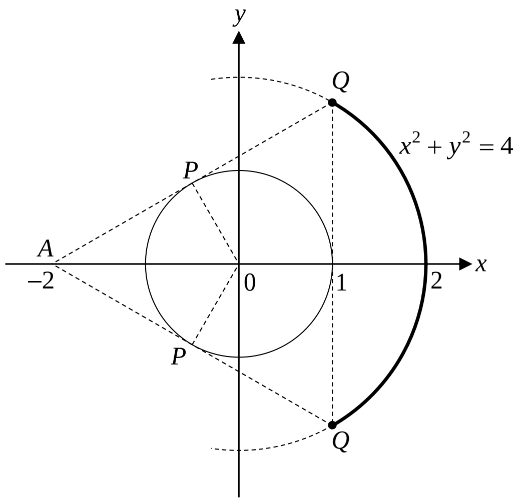
点 P は線分 AQ 上かつ円 $x^2+y^2=1$ 上の点であるから、線分 AQ と円 $x^2+y^2=1$ が、共有点を持つ。

右図のように、AQ が $x^2+y^2=1$ に接するとき、

$\overline{AP}=\overline{PQ}=\sqrt{3}$ であり、このとき $Q(1,\ \pm\sqrt{3})$ である。

求める Q の軌跡は、

円 $x^2+y^2=4$ の、$1\leqq x\leqq 2$ の部分である。……(答)



(注)

AQ と $x^2+y^2=1$ が 2 つの相違なる共有点を持つとき、

いずれの共有点を P としても、Q は一致する。