1998年京大後期文 $\boxed{1}$

a, b, c, d を実数とし、$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ とすると

$\beta^2 = c^2 - d^2 + 2cdi = a + bi \quad c^2 - d^2 = a$ ——① $\quad 2cd = b$ ——②

$b = 0$ のとき

$a \neq 0$ であるから、$c = d = 0$ ではない。$c = 0$ または $d = 0$ であるから、$c^2 = a$ または $d^2 = -a$ である。

$a > 0$ ならば $d = 0,\ c^2 = a$ で、$c = \pm\sqrt{a}$ である。$a < 0$ ならば $c = 0,\ d^2 = -a$ で、$d = \pm\sqrt{-a}$ である。

いずれにしても、β は2つ存在する。

$b \neq 0$ のとき

②より $d = \dfrac{b}{2c}$ であり、①に代入して $\quad c^2 - \dfrac{b^2}{4c^2} = a \quad 4c^4 - 4ac^2 - b^2 = 0$

$c^2 > 0$ より $\quad c^2 = \dfrac{2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \therefore c = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

$d^2 = \dfrac{b^2}{4c^2}$ より $\quad d^2 = \dfrac{b^2}{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \dfrac{b^2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}{2b^2} = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \therefore d = \pm\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

ここで、$b = 2cd$ より、$b > 0$ ならば c と d の符号は一致し、$b < 0$ ならば c と d の符号は異なる。
いずれにしても、c, d の組が2組のみに定まり、β は2つ存在する。

以上により、$\beta^2 = \alpha$ となる複素数 β は、2つ存在する。(証明終)