1998年京大後期文 $\boxed{2}$

(1)

$$BX^2=t^2+(t^2-b)^2=t^4-(2b-1)t^2+b^2=\left\{t^2-\left(b-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+b-\frac{1}{4}$$

$0<b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$b-\dfrac{1}{2}\leqq 0$ であり、BX^2 は、$t^2=0$ において、最小値 b^2 をとる。

$\dfrac{1}{2}<b$ のとき、$b-\dfrac{1}{2}>0$ であり、BX^2 は、$t^2=b-\dfrac{1}{2}$ において、最小値 $b-\dfrac{1}{4}$ をとる。

BX の最小値は　$0<b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき b、$\dfrac{1}{2}<b$ のとき $\sqrt{b-\dfrac{1}{4}}$ ……(答)

(2)

$0<b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、BX の最小値は1にならない。

$\sqrt{b-\dfrac{1}{4}}=1$ とすると　$b-\dfrac{1}{4}=1$　$b=\dfrac{5}{4}$　このとき、最小値を与える t は　$t^2=\dfrac{3}{4}$　$\therefore t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$X(t,\ t^2)$ における、$y=x^2$ の接線は、$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$ であるから

$P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right),\ Q\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ とすると、P における $y=x^2$ の接線は　$y=\sqrt{3}x-\dfrac{3}{4}$

一方、$BP=1$ であり、BP の傾きは　$\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　したがって、BP は $y=\sqrt{3}x-\dfrac{3}{4}$ と直交する。

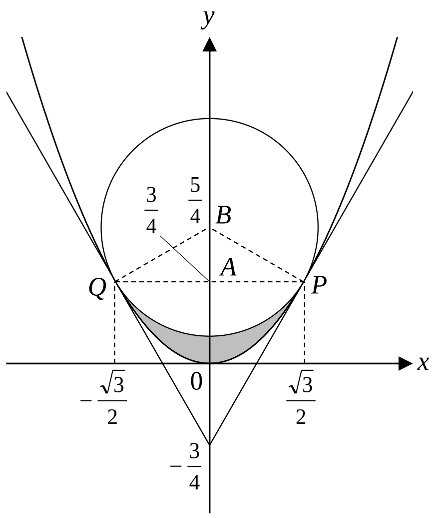
すなわち、$y=x^2$ と円 $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$ は、P において共通接線 $y=\sqrt{3}x-\dfrac{3}{4}$ を持つ。

対称性より、$y=x^2$ と円 $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$ は、Q においても共通接線 $y=-\sqrt{3}x-\dfrac{3}{4}$ を持つ。

以上により題意は示された。(証明終)

$A\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ とすると、$\angle PBA=\angle QBA=60°$ であるから

　$\therefore \angle PBQ=120°$ ……(答)



放物線と円弧 PQ で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$ ……(答)