1998 年京大後期文 $\boxed{5}$

(1)

$\dfrac{p^2+q^2}{a}=\dfrac{pq}{b}$ ――① のとき $b(p^2+q^2)=apq$

apqはbで割り切れるが、aとbは互いに素であるから、pqはbで割り切れる。(証明終)

(2)

pqはbで割り切れ、p^2+q^2はaで割り切れるので、$p^2+q^2=ka,\ pq=kb$とおける。
このとき、kはp^2+q^2とpqの最大公約数である。

pとqの最大公約数をlとし、$p=p'l,\ q=q'l$とおくと $p^2+q^2=(p'^2+q'^2)l^2,\ pq=p'q'l^2$

ここで、$p'^2+q'^2$と$p'q'$は、p'とq'の公約数以外で割り切れないことは自明である。
今、p'とq'は互いに素であるから、公約数は 1 しかない。
$p'^2+q'^2$と$p'q'$の公約数も 1 しかないから、$p'^2+q'^2$と$p'q'$は互いに素である。

したがって、p^2+q^2とpqの最大公約数はl^2であり、$k=l^2$であるから

$$a=p'^2+q'^2,\ b=p'q' \quad a+2b=p'^2+q'^2+2p'q'=(p'+q')^2 \quad \therefore \sqrt{a+2b}=p'+q'$$

以上により、$\sqrt{a+2b}$は自然数である。(証明終)