1998年京大文 $\boxed{3}$

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}-\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=\frac{(x-b)(x-a)+(x+b)(x+a)}{(x+a)(x-a)}-\frac{(x-a)(x-b)+(x+b)(x+a)}{(x+b)(x-b)}$$
$$=\frac{2x^2+2ab}{x^2-a^2}-\frac{2x^2+2ab}{x^2-b^2}=\frac{2(x^2+ab)\left\{(x^2-b^2)-(x^2-a^2)\right\}}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$$
$$=\frac{2(a^2-b^2)(x^2+ab)}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}>0$$

両辺に $(x^2-a^2)^2(x^2-b^2)^2$ をかけると　$2(a^2-b^2)(x^2+ab)(x^2-a^2)(x^2-b^2)>0$

$x\neq\pm a,\ \pm b$ の条件下で、$(a^2-b^2)(x^2+ab)(x^2-a^2)(x^2-b^2)>0$ の解を考える。

$a^2>b^2$ のとき　$(x^2+ab)(x^2-a^2)(x^2-b^2)>0$

$ab>0$ のとき　$x^2+ab>0$ であるから

$(x^2-a^2)(x^2-b^2)>0$　$x^2<b^2,\ a^2<x^2$　$\therefore x<-|a|,\ -|b|<x<|b|,\ |a|<x$

$ab<0$ のとき　$b^2<-ab<a^2$ であるから

$b^2<x^2<-ab,\ a^2<x^2$　$\therefore x<-|a|,\ -\sqrt{-ab}<x<-|b|,\ |b|<x<\sqrt{-ab},\ |a|<x$

$a^2<b^2$ のとき　$(x^2+ab)(x^2-a^2)(x^2-b^2)<0$

$ab>0$ のとき　$x^2+ab>0$ であるから

$(x^2-a^2)(x^2-b^2)<0$　$a^2<x^2<b^2$　$\therefore -|b|<x<-|a|,\ |a|<x<|b|$

$ab<0$ のとき　$a^2<-ab<b^2$ であるから

$x^2<a^2,\ -ab<x^2<b^2$　$\therefore -|b|<x<-\sqrt{-ab},\ -|a|<x<|a|,\ \sqrt{-ab}<x<|b|$

以上により

$$\begin{cases}|b|<|a|,\ ab>0 \text{ のとき} & x<-|a|,\ -|b|<x<|b|,\ |a|<x\\ |b|<|a|,\ ab<0 \text{ のとき} & x<-|a|,\ -\sqrt{-ab}<x<-|b|,\ |b|<x<\sqrt{-ab},\ |a|<x\\ |a|<|b|,\ ab>0 \text{ のとき} & -|b|<x<-|a|,\ |a|<x<|b|\\ |a|<|b|,\ ab<0 \text{ のとき} & -|b|<x<-\sqrt{-ab},\ -|a|<x<|a|,\ \sqrt{-ab}<x<|b|\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$