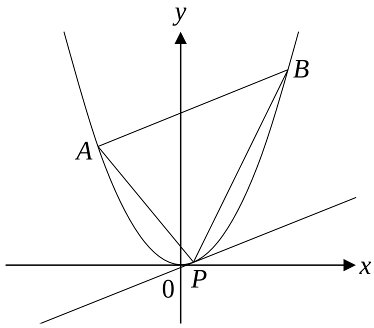
1998 年京大文 $\boxed{4}$

直線 AB の傾きは $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ であるから、直線 AB の式は　$y=(a+b)(x-a)+a^2=(a+b)x-ab$

$$s=\int_a^b\left\{(a+b)x-ab-x^2\right\}dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\frac{(b-a)^3}{6}$$



$y=x^2$ に直線 AB と平行な接線を引き、その接点と P が一致したとき、$S(P)$ は最大である。直線 AB と平行な接線を、$y=(a+b)x+k$ とすると

$x^2=(a+b)x+k$　　$x^2-(a+b)x-k=0$ ——①

①が重解を持つから　$D=(a+b)^2+4k=0$　　$\therefore k=-\dfrac{(a+b)^2}{4}$

このとき、①は　$x^2-(a+b)x+\dfrac{(a+b)^2}{4}=\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$　　$\therefore x=\dfrac{a+b}{2}$

$t=\dfrac{a+b}{2}$ は、$a<t<b$ を満たす。$S(P)$ の最大値を与える P は　$\therefore\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{(a+b)^2}{4}\right)$

P と直線 AB の距離は　$\dfrac{\left|(a+b)\cdot\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a+b)^2}{4}-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=\dfrac{\left|\dfrac{(a+b)^2}{4}-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=\dfrac{(b-a)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}$

線分 AB の長さは　$\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2(b+a)^2}=(b-a)\sqrt{(a+b)^2+1}$

$S(P)$ の最大値 S は　$\therefore S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(b-a)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}\cdot(b-a)\sqrt{(a+b)^2+1}=\dfrac{(b-a)^3}{8}$

以上により　$s:S=\dfrac{(b-a)^3}{6}:\dfrac{(b-a)^3}{8}$　　$\therefore s:S=4:3$ ……(答)