1998 年京大後期理 $\boxed{2}$

$$f_n(x)=\int_0^1(3x^2t\,f'_{n-1}(t)+3f(t))dt=3x^2\int_0^1 t\,f'_{n-1}(t)dt+3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

$a_n=\int_0^1 t\,f'_{n-1}(t)dt$、$b_n=\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$ は定数であるから、$f_n(x)=3a_nx^2+3b_n$ とおく。

$f'_n(x)=6a_nx$ より

$$a_{n+1}=\int_0^1 t\,f'_n(t)dt=6a_n\int_0^1 t^2dt=6a_n\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=2a_n$$

a_n は公比 2 の等比数列で、$3a_1=4$ より　$\therefore a_n=\frac{4}{3}\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}$

$$b_{n+1}=\int_0^1 f_n(t)dt=\left[a_nt^3+3b_nt\right]_0^1=a_n+3b_n \qquad b_{n+1}=3b_n+\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1} \qquad \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\left(\frac{b_n}{2^n}+\frac{2}{3}\right) \qquad \frac{b_n}{2^n}+\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{b_1}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

$3b_1=1$ より　$\frac{b_n}{2^n}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$　$\therefore b_n=\frac{5}{3}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}$

以上により　$\therefore f_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$　……(答)