1998 年京大後期理 $\boxed{3}$

$$u f_1(x,\ y) f_2(x,\ y) + v f_2(x,\ y) f_3(x,\ y) + f_3(x,\ y) f_1(x,\ y) = 0 \quad ――①$$

3 点の座標を $A_1(x_1,\ y_1),\ A_2(x_2,\ y_2),\ A_3(x_3,\ y_3)$ とすると

$$f_2(x_1,\ y_1) = f_3(x_1,\ y_1) = 0,\ f_3(x_2,\ y_2) = f_1(x_2,\ y_2) = 0,\ f_1(x_3,\ y_3) = f_2(x_3,\ y_3) = 0$$

であるから、①が表す曲線は、$u,\ v$ の値に関わらず 3 点 $A_1,\ A_2,\ A_3$ を通る。

①が 3 点 $A_1,\ A_2,\ A_3$ を通る円を表すには、xy の係数が 0 であり、x^2 と y^2 の係数が等しければよい。
xy と x^2 と y^2 の係数がすべて 0 であるとき、①は直線を表すが、$A_1,\ A_2,\ A_3$ は一直線上にないから、不適。

$$\begin{aligned} f_1(x,\ y) f_2(x,\ y) &= (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \\ &= a_1a_2x^2 + b_1b_2y^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)xy + (c_1a_2 + c_2a_1)x + (b_1c_2 + b_2c_1)y + c_1c_2 \\ f_2(x,\ y) f_3(x,\ y) &= (a_2x + b_2y + c_2)(a_3x + b_3y + c_3) \\ &= a_2a_3x^2 + b_2b_3y^2 + (a_2b_3 + a_3b_2)xy + (c_2a_3 + c_3a_2)x + (b_2c_3 + b_3c_2)y + c_2c_3 \\ f_3(x,\ y) f_1(x,\ y) &= (a_3x + b_3y + c_3)(a_1x + b_1y + c_1) \\ &= a_3a_1x^2 + b_3b_1y^2 + (a_3b_1 + a_1b_3)xy + (c_3a_1 + c_1a_3)x + (b_3c_1 + b_1c_3)y + c_3c_1 \end{aligned}$$

①の xy の係数が 0 より

$$(a_1b_2 + a_2b_1)u + (a_2b_3 + a_3b_2)v + (a_3b_1 + a_1b_3) = 0 \quad ――②$$

①の $x^2,\ y^2$ の係数が等しいので

$$a_1a_2u + a_2a_3v + a_3a_1 = b_1b_2u + b_2b_3v + b_3b_1 \quad (a_1a_2 - b_1b_2)u + (a_2a_3 - b_2b_3)v + (a_3a_1 - b_3b_1) = 0 \quad ――③$$

②、③を $u,\ v$ に関する連立一次方程式として解くと、②×$(a_2a_3 - b_2b_3)$ －③×$(a_2b_3 + a_3b_2)$ より

$$\begin{aligned} &\{(a_1b_2 + a_2b_1)(a_2a_3 - b_2b_3) - (a_1a_2 - b_1b_2)(a_2b_3 + a_3b_2)\}u \\ &\qquad = -\{(a_3b_1 + a_1b_3)(a_2a_3 - b_2b_3) - (a_3a_1 - b_3b_1)(a_2b_3 + a_3b_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_1b_2 + a_2b_1)(a_2a_3 - b_2b_3) - (a_1a_2 - b_1b_2)(a_2b_3 + a_3b_2) \\ &\quad = a_1a_2a_3b_2 - a_1{b_2}^2b_3 + {a_2}^2a_3b_1 - a_2b_1b_2b_3 - a_1{a_2}^2b_3 - a_1a_2a_3b_2 + a_2b_1b_2b_3 + a_3b_1{b_2}^2 \\ &\quad = -a_1{b_2}^2b_3 + {a_2}^2a_3b_1 - a_1{a_2}^2b_3 + a_3b_1{b_2}^2 = {a_2}^2(a_3b_1 - a_1b_3) + {b_2}^2(a_3b_1 - a_1b_3) \\ &\quad = ({a_2}^2 + {b_2}^2)(a_3b_1 - a_1b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(a_3b_1 + a_1b_3)(a_2a_3 - b_2b_3) + (a_3a_1 - b_3b_1)(a_2b_3 + a_3b_2) \\ &\quad = -a_2{a_3}^2b_1 + a_3b_1b_2b_3 - a_1a_2a_3b_3 + a_1b_2{b_3}^2 + a_1a_2a_3b_3 + a_1{a_3}^2b_2 - a_2b_1{b_3}^2 - a_3b_1b_2b_3 \\ &\quad = -a_2{a_3}^2b_1 + a_1b_2{b_3}^2 + a_1{a_3}^2b_2 - a_2b_1{b_3}^2 = {a_3}^2(a_1b_2 - a_2b_1) + {b_3}^2(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &\quad = ({a_3}^2 + {b_3}^2)(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

$$\therefore ({a_2}^2 + {b_2}^2)(a_3b_1 - a_1b_3)u = ({a_3}^2 + {b_3}^2)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ここで、3 直線はいずれも平行ではないから　$a_3b_1 - a_1b_3 \neq 0,\ a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
$a_2 = b_2 = 0$ とすると、$a_3 = b_3 = 0$ であるが、$f_2(x,\ y) = 0,\ f_3(x,\ y) = 0$ が直線を表さなくなるので、不適。
したがって、②、③を満たす $u = \dfrac{({a_3}^2 + {b_3}^2)(a_1b_2 - a_2b_1)}{({a_2}^2 + {b_2}^2)(a_3b_1 - a_1b_3)}$ が存在し、v も定まる。
以上により、題意を満たす $u,\ v$ が存在することが示された。（証明終）

（注）

v も求めると、$v=\dfrac{(a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2b_3-a_3b_2)}{(a_2{}^2+b_2{}^2)(a_3b_1-a_1b_3)}$ である。

x^2 と y^2 の係数は　$a_1a_2u+a_2a_3v+a_3a_1=b_1b_2u+b_2b_3v+b_3b_1=\dfrac{(a_2b_1-a_1b_2)(a_2b_3-a_3b_2)}{a_2{}^2+b_2{}^2}\neq 0$

計算は省略。