1998 年京大後期理 $\boxed{4}$

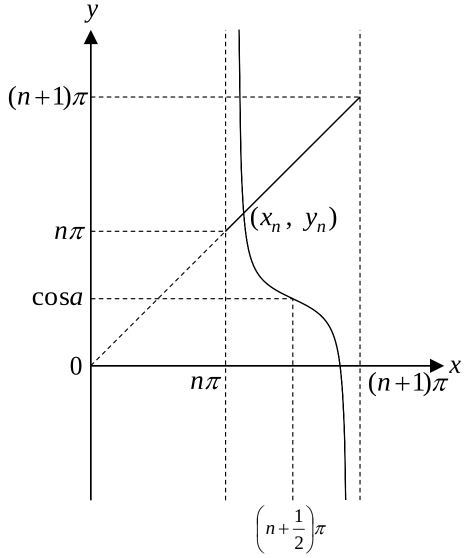
(1)

$n\pi < x < (n+1)\pi$ において、 $x\sin x = \sin(x+a)$ とすると

$$x = \frac{\sin(x+a)}{\sin x} = \cos a + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin a = \cos a + \frac{\sin a}{\tan x}$$

$n\pi < x < (n+1)\pi$ において、 $y = x$ と $y = \cos a + \dfrac{\sin a}{\tan x}$ のグラフを

図示すると、右の通りで、1 つの共有点 $(x_n,\ y_n)$ を持つ。



$n\to\infty$ のとき、 $y_n\to\infty$ であり、漸近線 $x = n\pi$ に近づくから

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(x_n - n\pi) = 0 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$x_n = \cos a + \dfrac{\sin a}{\tan x_n}$ より

$$x_n - n\pi = \cos a + \frac{\sin a}{\tan x_n} - n\pi \qquad (x_n - n\pi)^2 = (x_n - n\pi)\cos a + \frac{(x_n - n\pi)}{\tan x_n}\cdot\sin a - n\pi(x_n - n\pi)$$

$$n(x_n - n\pi) = \frac{1}{\pi}\left\{(x_n - n\pi)\cos a + \frac{(x_n - n\pi)}{\tan x_n}\cdot\sin a - (x_n - n\pi)^2\right\}$$

周期性により、 $\tan x_n = \tan(x_n - n\pi)$ であるから

$$n(x_n - n\pi) = \frac{1}{\pi}\left\{(x_n - n\pi)\cos a + \frac{(x_n - n\pi)}{\tan(x_n - n\pi)}\cdot\sin a - (x_n - n\pi)^2\right\}$$

(1)より、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n - n\pi) = 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - n\pi)}{\tan(x_n - n\pi)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - n\pi)}{\sin(x_n - n\pi)}\cdot\cos(x_n - n\pi) = 1$

したがって $\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty} n(x_n - n\pi) = \frac{\sin a}{\pi}$ $\cdots\cdots$(答)