1998年京大理$\boxed{2}$

(1)

$f(a)=a^2+7=2^n k$とする。

このとき、右辺は偶数であり、左辺が偶数になるにはa^2が奇数でなければならない。

すなわち、aは奇数である。

$f(a+2^{n-1})=a^2+2^n a+2^{2n-2}+7=2^n k+2^n a+2^{2n-2}=2^n(k+a+2^{n-2})$より

aは奇数であるから、$a+2^{n-2}$は奇数であり、kと$k+a+2^{n-2}$の奇遇は異なる。

したがって、kと$k+a+2^{n-2}$のうち少なくとも一方は偶数であるから、

$f(a)$と$f(a+2^{n-1})$のうち少なくとも一方は2^{n+1}の倍数である。（証明終）

(2)

$f(1)=1+7=8=2^3$であるから、$a_1=a_2=a_3=1$と取れる。以降、$n\geqq 3$として考えてよい。

すべての自然数は、kを奇数として$2^n k$と表せる。

今、a_n, k_nを奇数として、$f(a_n)={a_n}^2+7=2^n k_n$とする。

このとき、(1)より$f(a_n+2^{n-1})=2^n(k_n+a_n+2^{n-2})$であり、$k_n+a_n+2^{n-2}$は偶数であるから、

$f(a_n+2^{n-1})$は、少なくとも2^{n+1}の倍数である。すなわち、$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$と取ることができる。

$f(a_n+2^{n-1})$が、奇数k_{n+1}によって、$f(a_n+2^{n-1})=2^{n+1}k_{n+1}$と書けるとき、

次に、$a_{n+2}=a_{n+1}+2^n$と取ることができる。

$f(a_n+2^{n-1})$が、$n+2$以上の自然数mと奇数k_mによって、$f(a_n+2^{n-1})=2^m k_m$と書けるとき、

$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_m=a_n+2^{n-1}$と取れる。次に、$a_{m+1}=a_m+2^{m-1}$と取ることができる。

$a_3=1$から始めて、このような操作を続ければ、任意の自然数nに対して、$f(a_n)$が2^nの倍数となるようなa_nを取ることができる。以上により示された。（証明終）