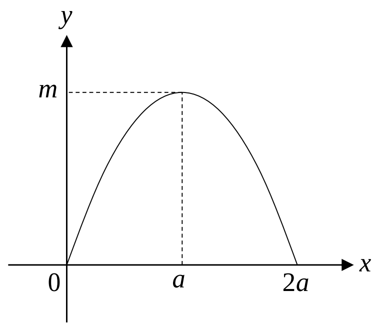
1998 年京大理 $\boxed{4}$



この放物線の方程式は、 $y=-\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ で与えられる。

$$S_m=-\frac{m}{a^2}\int_0^{2a}x(x-2a)dx=\frac{m}{a^2}\cdot\frac{(2a)^3}{6}=\frac{4}{3}ma$$

次に、 $f(x)=-\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ とすると、この領域の $x=k\ (0\leqq k\leqq 2a)$ の部分にある格子点の個数は、ガウス記号を用いて $M(k)=[f(k)]+1$ で与えられる。

$f(k)<[f(k)]+1\leqq f(k)+1$ であるから、各辺の $k=0$ から $k=2a$ までの和をとると

$$\therefore \sum_{k=0}^{2a}f(k)<L_m\leqq\sum_{k=0}^{2a}f(k)+2a+1$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{2a}f(k)=\frac{m}{a^2}\sum_{k=0}^{2a}(2ak-k^2)=\frac{m}{a^2}\left\{2a\cdot\frac{2a(2a+1)}{2}-\frac{2a(2a+1)(4a+1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{m}{a}(2a+1)\left(2a-\frac{4a+1}{3}\right)=\frac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}=\frac{m(4a^2-1)}{3a}$$

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a}<L_m\leqq\frac{m(4a^2-1)}{3a}+2a+1 \qquad \frac{m(4a^2-1)}{3a}\cdot\frac{3}{4ma}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\left\{\frac{m(4a^2-1)}{3a}+2a+1\right\}\cdot\frac{3}{4ma}$$

$$\therefore \frac{4a^2-1}{4a^2}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{4a^2-1}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4ma}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{3(2a+1)}{4ma}=0$ であるから、はさみうちの原理より　$\displaystyle\therefore \lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=1-\frac{1}{4a^2}$ ……(答)