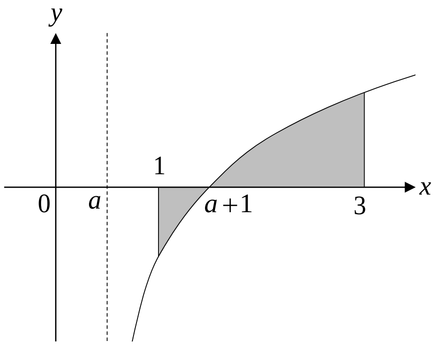
1998年京大理 $\boxed{6}$

(1)



$$V(a)=\pi\int_1^3(\log(x-a))^2\,dx=\pi\int_{1-a}^{3-a}(\log x)^2\,dx$$
$$=\pi\left(\Big[x(\log x)^2\Big]_{1-a}^{3-a}-\int_{1-a}^{3-a}x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$
$$=\pi\left(\Big[x(\log x)^2\Big]_{1-a}^{3-a}-2\int_{1-a}^{3-a}\log x\,dx\right)$$
$$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2-2\Big[x\log x-x\Big]_{1-a}^{3-a}\right\}$$
$$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2-2(3-a)\log(3-a)+2(1-a)\log(1-a)+4\right\}$$ ……（答）

(2)

$V(a)=\pi\int_{1-a}^{3-a}(\log x)^2\,dx$ より

$$V'(a)=\pi(-(\log(3-a))^2+(\log(1-a))^2)=\pi(\log(1-a)+\log(3-a))(\log(1-a)-\log(3-a))$$
$$=\pi\cdot(\log(1-a)(3-a))\cdot\log\frac{1-a}{3-a}$$

$0<1-a<3-a$ より　$\dfrac{1-a}{3-a}<1$　$\log\dfrac{1-a}{3-a}<0$

$(1-a)(3-a)=a^2-4a+3=(a-2)^2-1$ より、$0<a<1$ において $(1-a)(3-a)$ は単調減少。

$(1-a)(3-a)=1$ を解くと　$a^2-4a+2=0$　$a=2-\sqrt{2}$ は、$0<a<1$ を満たす。

$V(a)$ の増減は右の通りで、$a=2-\sqrt{2}$ のとき最小である。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$V'(a)$		$-$	0	$+$	
$V(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$t=2-\sqrt{2}$ のとき、$(1-t)(3-t)=1$ より

$$1-t=\frac{1}{3-t}\qquad \log(1-t)=-\log(3-t)$$

$$V(t)=\pi\left\{(3-t)(\log(3-t))^2-(1-t)(\log(3-t))^2-2(3-t)\log(3-t)-2(1-t)\log(3-t)+4\right\}$$
$$=\pi\left\{2(\log(3-t))^2-4(2-t)\log(3-t)+4\right\}$$

$t=2-\sqrt{2}$ を代入して、$V(a)$ の最小値は

$$V(2-\sqrt{2})=\pi\left\{2(\log(1+\sqrt{2}))^2-4\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+4\right\}=2\pi\left\{\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})\right\}^2$$ ……（答）

※$V(a)$ の微分は、積分の形のまま行えば楽。