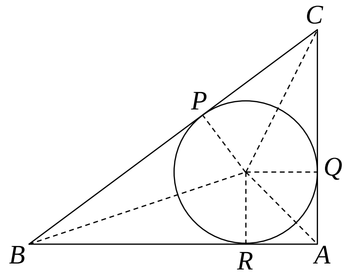
1998年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)



右図のように、直角三角形ABCの斜辺をBCとし、内接する円と辺$BC,\ CA,\ AB$との接点を、$P,\ Q,\ R$とする。

辺$BC,\ CA,\ AB$の長さを、それぞれ$a,\ b,\ c$とすると　$CQ=b-r,\ BR=c-r$

$AQ=AR,\ BP=BR,\ CP=CQ$であるから　$a=BP+CP=b+c-2r$ ——①

$a+b+c+2r=2$に①を代入すると　$2(b+c)=2$　$\therefore b+c=1$

したがって、斜辺の長さは　$\therefore a=1-2r$ ……(答)

(2)

$a=1-2r>0$であるから　$0<r<\dfrac{1}{2}$

直角三角形ABCの面積は、$S=\dfrac{1}{2}bc$で与えられる。(1)より$b+c=1$であるから、$0<b<1$として

$$S=\frac{1}{2}b(1-b)=-\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

したがって、Sは$b=c=\dfrac{1}{2}$のとき最大となり、最大値は$\dfrac{1}{8}$ ……(答)

なお、このとき$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$であるから　$r=\dfrac{1-a}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

(注)

$\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$より、$\dfrac{1}{2}bc=r(1-r)=-\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$と$r$の式で表されるが、$0<r<\dfrac{1}{2}$であるから、

最大値は$\dfrac{1}{4}$ではない。

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{b^2+(1-b)^2}=\sqrt{2b^2-2b+1}=\sqrt{2\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$であるから　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq a<1$

$r=\dfrac{1-a}{2}$より、$0<r\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$となる。