1999 年京大後期文 2

$$
\begin{aligned}
&\sin^2(\alpha+\beta)-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\\
&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\\
&=\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\\
&=\sin^2\alpha(\cos^2\beta-1)+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta(\cos^2\alpha-1)\\
&=-\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta-\sin^2\beta\sin^2\alpha\\
&=2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

$\alpha>0°,\ \beta>0°,\ \alpha+\beta<180°$ より、$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2(\alpha+\beta)$ のとき　$\cos(\alpha+\beta)=0$　$\therefore\alpha+\beta=90°$

$0°<\alpha<90°$ として　$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\sin(90°-\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)$

$45°<\alpha+45°<135°$ であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin(\alpha+45°)\leqq 1$

求める範囲は　$\therefore 1<\sin\alpha+\sin\beta\leqq\sqrt{2}$　……（答）　等号成立は、$\alpha=\beta=45°$ のとき。