1999年京大後期文 $\boxed{4}$

$f(x)=x^3+kx$ とする。$f(x)$ は奇関数であり、$y=f(x)$ のグラフは原点に関して点対称である。
$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ t^3+kt)$ における接線を考える。$f'(x)=3x^2+k$ より

$y=(3t^2+k)(x-t)+t^3+kt=(3t^2+k)x-2t^3$

これが $y=f(x)$ 上にない点 $(a,\ b)$ を通るとき　$b=(3t^2+k)a-2t^3=-2t^3+3at^2+ka$ ——①

t に関する3次方程式①が3つの相違なる実数解を持つとき、$s=-2t^3+3at^2+ka$ のグラフと、$s=b$ のグラフが、3つの共有点を持つ。$g(t)=-2t^3+3at^2+ka$ とおくと　$g'(t)=-6t^2+6at=-6t(t-a)$
$a=0$ のとき、$g'(t)\leqq 0$ となるので、$s=g(t)$ は単調減少であり、不適。
$a>0$ のとき、$t=0$ で極小、$t=a$ で極大となる。
$a<0$ のとき、$t=a$ で極小、$t=0$ で極大となる。
$g(0)=ka,\ g(a)=a^3+ka$ であるから、$y=f(x)$ に3本の接線が引ける点 $(a,\ b)$ の存在範囲は

$a>0$ のとき $ka<b<a^3+ka$、$a<0$ のとき $a^3+ka<b<ka$

領域 A は $x>0$ の範囲にあるから、$x>0$ かつ $kx<y<x^3+kx$ が表す領域に、A 全体が含まれる。
$k\geqq 0$ のとき、$x>0$ かつ $kx<y<x^3+kx$ が表す領域は、第1象限の点しか含まない。
A は第4象限にあるから、少なくとも $k<0$ が必要である。

$k<0$ のとき
$f'(x)=3x^2+k$ より、$f(x)$ の $x>0$ における増減は右の通り。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{k}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$\sqrt{-\frac{k}{3}}<1$　$-3<k$ のとき

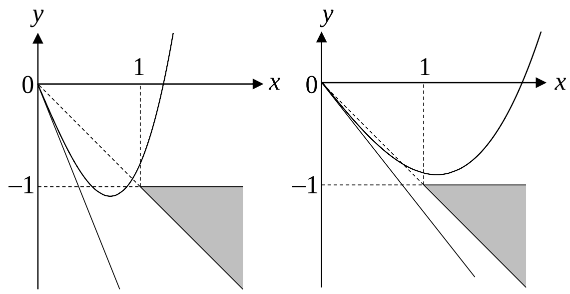
$k\leqq -1$ かつ $-1\leqq f(1)=1+k$ であればよいので　$\therefore -2\leqq k\leqq -1$

$\sqrt{-\frac{k}{3}}\geqq 1$　$k\leqq -3$ のとき

$k\leqq -1$ かつ $-1\leqq f\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}(-k)^{\frac{3}{2}}$ であればよい。

$\frac{2\sqrt{3}}{9}(-k)^{\frac{3}{2}}\leqq 1$ のとき　$(-k)^3\leqq\frac{27}{4}$　$-k\leqq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

$\therefore k\geqq -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$　これは $k\leqq -3$ を満たさず、不適。



以上により、$-2\leqq k\leqq -1$ が必要であるが、このとき、上記議論により、
A 全体が $x>0$ かつ $kx<y<x^3+kx$ に含まれることは明らかである。
求める必要十分条件は　$\therefore -2\leqq k\leqq -1$ ……(答)

※ $y=kx$ は、$y=x^3+kx$ の原点における接線、すなわち変曲点における接線である。