1999年京大後期文 $\boxed{5}$

(1)

$a=2l+1,\ b=2m+1$ とすると　$a^2+b^2=4l^2+4l+1+4m^2+4m+1=4(l^2+l+m^2+m)+2$

ところが、$(2n)^2=4n^2,\ (2n+1)^2=4(n^2+n)+1$ より、c^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 であるから、

$a^2+b^2=c^2$ を満たさない。

したがって、a が奇数ならば、b は偶数であり、c は奇数である。（証明終）

(2)

$a^2+b^2=c^2$ より　$c^2-a^2=(c+a)(c-a)=b^2$

$c,\ a$ は奇数であるから、$c+a,\ c-a$ は偶数であり、$c+a=2l,\ c-a=2m\ (l>m)$ とおける。

b は偶数であるから、$b=2n$ とすると　$4lm=4n^2$　$lm=n^2$

ここで、$a=l-m,\ b=2\sqrt{lm}$ であり、$l=l'k,\ m=m'k$ とすると　$a=(l'-m')k,\ b=2\sqrt{l'm'}\,k$

$a,\ b$ は互いに素であるから、$k=1$ しかあり得ない。

$l,\ m$ は互いに素であるから、lm が平方数であるとき、$l,\ m$ はいずれも平方数である。

したがって、$c+a=2d^2$ となる自然数 d が存在する。（証明終）