1999年京大文 $\boxed{5}$

n 角柱の $n+2$ 個の面のうち、側面に番号$1, 2, \cdots, n$ が順に書かれ(すなわち番号1と番号 n が隣り合う)、上面に番号 $n+1$、底面に番号 $n+2$ が書かれているとしても、一般性を失わない。

(1)

n 角柱の $n+2$ 個の面のうち、上面および底面は、n 個の側面すべてと隣り合うから、上面および底面に使った色は、側面に使うことができない。

$k=2$ のとき

1色を上面と底面に使い、残り1色で側面を塗ることはできないので　$\therefore P_2=0$ ……(答)

$k=3$ のとき

1色を上面と底面に使い、残り2色で側面を塗るには、側面の数が偶数である必要がある。

すなわち、n が偶数であるとき、奇数番号の側面と、偶数番号の側面を同じ色にすればよい。

このとき、上面および底面の色の選び方が3通りで、側面の塗り方が2通りであるから

n が奇数のとき $P_3=0$、n が偶数のとき $P_3=6$ ……(答)

(2)

上面と底面を異なる色にすると、残りは2色であるが、番号1と番号7が隣り合うため、2色で側面を塗ることはできない。したがって、上面と底面は同じ色でなければならない。3色で側面を塗る塗り方を考える。

今、①の面の色を○、他の2色を△、×とする。

このとき、○が塗られる面のパターンは表の通り。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
○						
○		○				
○			○			
○				○		
○					○	
○		○		○		
○		○			○	
○			○		○	

○が①の面だけのとき、残り6面の塗り方は、

△と×を交互に塗るから、2通り。

○が①を含め複数の面に塗られているとき、

○と○の間の塗り方は、△と×を交互に塗るから、

いずれの箇所も2通り。

したがって、①の面を○で塗る塗り方は　$2+4\times2\times2+3\times2\times2\times2=2+16+24=42$通り

対称性より、①の面を△、×で塗る塗り方も、それぞれ42通りであるから、

側面を3色で塗る塗り方は　$3\times42=126$通り

上面および底面の色の選び方は4通りであるから　$\therefore P_4=4\times126=504$通り ……(答)