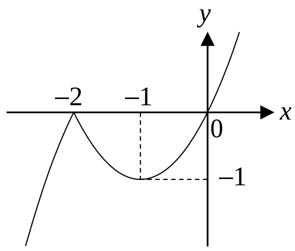
1999 年京大後期理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

$x \geqq -2$ のとき　$x|x+2| = x(x+2) = (x+1)^2 - 1$　$x < -2$ のとき　$x|x+2| = -x(x+2) = -(x+1)^2 + 1$

$y = x|x+2|$ のグラフは右図の通り。求める傾きを k とする。



$y = x(x+2)$ と $y = kx$ の、原点以外の交点の x 座標は

$x(x+2) = kx$　$x(x+2-k) = 0$　$\therefore x = k-2$

$k - 2 \neq 0$ より　$\therefore k \neq 2$

$y = -x(x+2)$ と $y = kx$ の、原点以外の交点の x 座標は

$-x(x+2) = kx$　$x(x+2+k) = 0$　$\therefore x = -k-2$

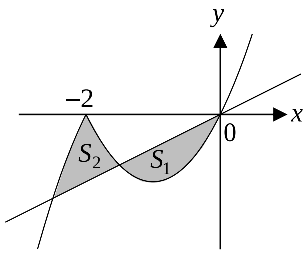
グラフより、$y = -x(x+2)$ と $y = kx$ が、$x = 0$ 以外で交差するとき、

その x 座標は -2 より小さいから　$-k-2 \leqq -2$　$\therefore k \geqq 0$

$y = x|x+2|$ と $y = kx$ が、相違なる 3 点で交わるには　$\therefore 0 < k < 2,\ 2 < k$ ——①

$0 < k < 2$ のとき

$-2 < k-2 < 0$ であるから、$S_1,\ S_2$ を図示すると、右図の通り。



$$S_1 = \int_{k-2}^{0} \left\{kx - (x^2 + 2x)\right\} dx = -\int_{k-2}^{0} x(x-k+2)\,dx = \frac{(2-k)^3}{6}$$

$$S_2 = \int_{-k-2}^{-2} (-x^2 - 2x - kx)\,dx + \int_{-2}^{k-2} (x^2 + 2x - kx)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - (k+2)\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-k-2}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} - (k-2)\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{k-2}$$

$$= \frac{8}{3} - 2(k+2) - \frac{(k+2)^3}{3} + \frac{(k+2)^3}{2} + \frac{(k-2)^3}{3} - \frac{(k-2)^3}{2} + \frac{8}{3} + 2(k-2)$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{(k+2)^3}{6} + \frac{(2-k)^3}{6}$$

$S_1 : S_2 = 9 : 8$ より、$9S_2 - 8S_1 = 0$ であるから

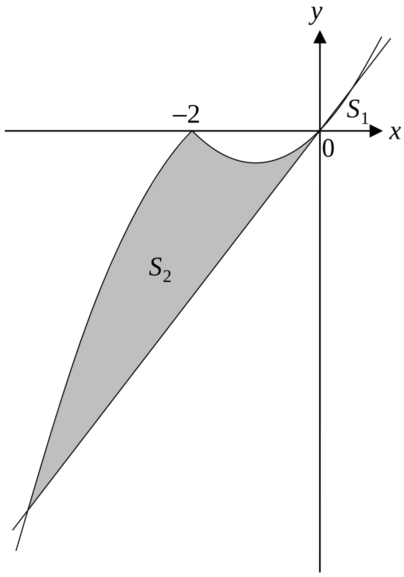
$$6(9S_2 - 8S_1) = -144 + 9(k+2)^3 + 9(2-k)^3 - 8(2-k)^3$$

$$= -144 + 9(k^3 + 6k^2 + 12k + 8) + (8 - 12k + 6k^2 - k^3) = 8k^3 + 60k^2 + 96k - 64 = 0$$

$2k^3 + 15k^2 + 24k - 16 = 0$　$(2k-1)(k+4)^2 = 0$

$0 < k < 2$ より、適するのは　$\therefore k = \dfrac{1}{2}$

$2<k$ のとき
$0<k-2$ であるから、$S_1,\ S_2$ を図示すると、右図の通り。



$$S_1=\int_0^{k-2}\left\{kx-(x^2+2x)\right\}dx=-\int_0^{k-2}x(x-k+2)dx=\frac{(k-2)^3}{6}$$

S_2 は、$y=-x(x+2)$ と $y=kx$ で囲まれた部分の面積から、
$y=-x(x+2)$ と $y=0$ で囲まれた部分の面積の 2 倍を引いた
値に等しいから

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-k-2}^{0}\left\{-(x^2+2x)-kx\right\}dx-2\int_{-2}^{0}\left\{-(x^2+2x)\right\}dx\\&=-\int_{-k-2}^{0}x(x+k+2)dx+2\int_{-2}^{0}x(x+2)dx\\&=\frac{(k+2)^3}{6}-2\cdot\frac{2^3}{6}=\frac{(k+2)^3}{6}-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$S_1:S_2=9:8$ より、$9S_2-8S_1=0$ であるから

$$\begin{aligned}6(9S_2-8S_1)&=9(k+2)^3-144-8(k-2)^3\\&=9(k^3+6k^2+12k+8)-144-8(k^3-6k^2+12k-8)=k^3+102k^2+12k-8=0\end{aligned}$$

ここで、$2<k$ より　$k^3+102k^2+12k-8>8+408+24-8=432>0$
$2<k$ のとき、$k^3+102k^2+12k-8=0$ を満たす k は、存在しない。

以上により、適するのは　$\therefore k=\dfrac{1}{2}$　……(答)

※ $2<k$ のときの論証で手を抜くと、どれだけ減点されるだろうか？