2000年京大後期文 $\boxed{1}$

$\alpha = e^{i\theta}$ とおけるので　$\left|\alpha^m + \alpha^{-m}\right| = \left|e^{im\theta} + e^{-im\theta}\right| = 2\left|\cos m\theta\right|$

$\left|\cos\theta\right| > \frac{1}{2}$ のとき

$\left|\alpha^1 + \alpha^{-1}\right| = 2\left|\cos\theta\right| > 1$ が成り立つ。

$\left|\cos\theta\right| < \frac{1}{2}$ のとき　$-\frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{1}{2}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ であるから　$-1 \leqq \cos 2\theta < -\frac{1}{2}$

$\left|\cos 2\theta\right| > \frac{1}{2}$ であるから、$\left|\alpha^2 + \alpha^{-2}\right| = 2\left|\cos 2\theta\right| > 1$ が成り立つ。

$\left|\cos\theta\right| = \frac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\cos 3\theta = \pm\left(4\cdot\frac{1}{8} - 3\cdot\frac{1}{2}\right) = \pm 1$　$\left|\cos 3\theta\right| = 1$ であるから、$\left|\alpha^3 + \alpha^{-3}\right| = 2\left|\cos 3\theta\right| = 2 > 1$ が成り立つ。

したがって、$\left|\alpha^m + \alpha^{-m}\right| > 1$ となる自然数 m が存在することが示された。（証明終）

※理系後期 $\boxed{5}$ (2) とほぼ同じだが、$\left|\cos\theta\right| = \frac{1}{2}$ の場合もあり得ることに注意。