2000 年京大後期文 $\boxed{3}$

(1)

格子点を頂点とする三角形の 1 つの頂点を、$O(0, 0)$ としても一般性を失わない。

残りの 2 つの頂点を、$A(p, q), B(r, s)$ とする。

3 点 O, A, B は互いに相違なる点であり、なおかつ一直線上にない。この三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)-(pr+qs)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2r^2+q^2r^2+p^2s^2+q^2s^2)-(p^2r^2+2pqrs+q^2s^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{q^2r^2+p^2s^2-2pqrs}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(qr-ps)^2}=\frac{1}{2}|qr-ps|$$

OA, OB が平行ではないことから、$qr-ps\neq 0$ であり、$|qr-ps|$ は自然数であるから

$|qr-ps|\geqq 1 \quad \therefore S\geqq\frac{1}{2}$ （証明終）

(2)

格子点を頂点とする面積1の凸四角形を、対角線で分割する。

このとき、(1) より、2 つの格子点を頂点とする三角形の面積は、ともに $\frac{1}{2}$ であり、等しい。

凸四角形 $ABCD$ を、対角線 AC で分割すると、

2 点 B, D は、対角線 AC からの距離が等しく、なおかつ、互いに直線 AC から見て逆側にある。

凸四角形の対角線は交差するから、対角線 BD の中点は、対角線 AC 上にある。

凸四角形 $ABCD$ を、対角線 BD で分割すると、

2 点 A, C は、対角線 BD からの距離が等しく、なおかつ、互いに直線 BD から見て逆側にある。

凸四角形の対角線は交差するから、対角線 AC の中点は、対角線 BD 上にある。

結局、2 本の対角線 AC, BD は、互いの中点で交差する。

したがって、格子点を頂点とする面積1の凸四角形は、平行四辺形である。（証明終）