2000 年京大後期文 $\boxed{4}$

(1)

条件(イ)より、2 点 $(x,\ f(x))$ と $(-x,\ f(-x))$ の中点が、$(0, 1)$ であるから

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=1 \qquad f(x)+f(-x)=2ax^2+2c=2 \qquad ax^2+c-1=0$$

これが任意の実数 x について成立するには　$a=0,\ c-1=0$　$\therefore a=0,\ c=1$

$f(x)=x^3+bx+1$ より　$f'(x)=3x^2+b$

条件(ロ)より、$f'(x)=0$ が相違なる 2 つの実数解を持つから　$\therefore b<0$

$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$ のとき極大、$x=\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$ のとき極小。

$$f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)-f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=-2\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3-2b\sqrt{-\frac{b}{3}}$$

$$=\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(-b)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}(-b)^{\frac{3}{2}}=4$$

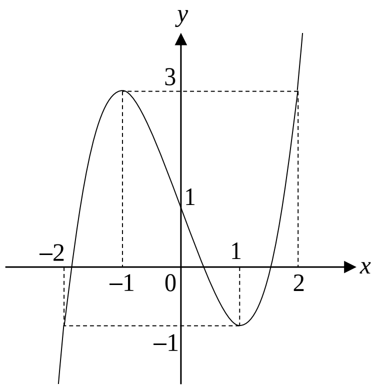
x	$\cdots$	$-\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$$(-b)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3} \qquad (-b)^3=27 \qquad -b=3 \qquad \therefore b=-3$$

$f(x)=x^3-3x+1$、$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ であるから、極大値は $f(-1)=3>0$、極小値は $f(1)=-1<0$。
したがって、$y=f(x)$ のグラフは、x 軸と相違なる 3 点で交わる。(証明終)

(2)

$y=f(x)$ のグラフは右図の通り。



解と係数の関係より、$\alpha+\beta+\gamma=0$ であるから　$-\beta-\gamma=\alpha$　$\therefore \dfrac{-\beta-\gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$

グラフより、$-2<\alpha<-1$ であるから　$-1<\dfrac{\alpha}{2}<-\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ は $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ において単調減少であり、$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{19}{8}>2$

したがって　$\therefore f\left(\dfrac{-\beta-\gamma}{2}\right)=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)>f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>2$　(証明終)