2000年京大後期理$\boxed{5}$

(1)

$\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$ とすると　$a_n=|\alpha|^n e^{in\theta}+\dfrac{1}{|\alpha|^n}e^{-in\theta}=\left(|\alpha|^n+\dfrac{1}{|\alpha|^n}\right)\cos n\theta+i\left(|\alpha|^n-\dfrac{1}{|\alpha|^n}\right)\sin n\theta$

$$|a_n|^2=\left(|\alpha|^n+\frac{1}{|\alpha|^n}\right)^2\cos^2 n\theta+\left(|\alpha|^n-\frac{1}{|\alpha|^n}\right)^2\sin^2 n\theta$$
$$=\left(|\alpha|^{2n}+\frac{1}{|\alpha|^{2n}}+2\right)\cos^2 n\theta+\left(|\alpha|^{2n}+\frac{1}{|\alpha|^{2n}}-2\right)\sin^2 n\theta=|\alpha|^{2n}+\frac{1}{|\alpha|^{2n}}+2\cos 2n\theta$$

$0<|\alpha|<1$のとき　$n\to\infty$とすると、$\dfrac{1}{|\alpha|^{2n}}\to\infty$　$1<|\alpha|$のとき　$n\to\infty$とすると、$|\alpha|^{2n}\to\infty$

したがって、すべての自然数nについて$|a_n|<2$となるには　$\therefore|\alpha|=1$　（証明終）

(2)

$|a_n|^2=2+2\cos 2n\theta=4\cos^2 n\theta$ より　$|a_n|=2|\cos n\theta|<2$　$\therefore|\cos n\theta|<1$

すべての自然数nについて$|\cos n\theta|\neq 1$であるから、kを整数として　$\therefore n\theta\neq k\pi$

すなわち、θはπの有理数倍ではない。これより、$|\cos\theta|\neq 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$である。

$\dfrac{1}{2}<|\cos\theta|<1$のとき　$|a_1|=2|\cos\theta|>1$が成り立つ。

$0<|\cos\theta|<\dfrac{1}{2}$のとき　$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0,\ 0<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$であるから　$-1<\cos 2\theta<-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}<|\cos 2\theta|<1$であるから、$|a_2|=2|\cos 2\theta|>1$が成り立つ。

したがって、$|a_m|>1$となる自然数mが存在することが示された。（証明終）