2000 年京大理 $\boxed{4}$

$p=2$ のとき　$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$　$ab>0$ より、実数ではない。

$p=3$ のとき　$(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i=a^3-3ab^2+b(3a^2-b^2)i$

虚数部分が 0 であるとき　$3a^2=b^2$

b^2 は 3 の倍数であるから b は 3 の倍数であり、$b=3b'$ とすると　$3a^2=9b'^2$　$a^2=3b'^2$

a^2 は 3 の倍数であるから a は 3 の倍数であるが、a, b が互いに素であることに反する。

したがって、$3a^2-b^2\neq 0$ であり、$(a+bi)^3$ は実数ではない。

$p\geqq 5$ のとき　$(a+bi)^p$ の虚数部分は

$$\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}(bi)^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}b^{2k-1}(-1)^k i^{-1}=i\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}(-1)^{k-1} {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}b^{2k-1}$$

これが 0 であるとき

$$\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}(-1)^{k-1} {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}b^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{k-1} {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}b^{2k-1}+b^p=0$$

$$\therefore b^p=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}a^{p-2k+1}b^{2k-1} \quad ――① $$

①の右辺は a の倍数であり、a, b は互いに素であるから、左辺 b^p が a の倍数になるのは $a=1$ のときのみ。

$$b^p=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}b^{2k-1}=\sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}b^{2k-1}-pb \quad \therefore b^{p-1}+p=\sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}b^{2k-2} \quad ――②$$

②の右辺は b の倍数であり、p は素数であるから、②の左辺が b の倍数になるのは、$b=1$ か $b=p$ のとき。

$b=1$ のとき　$$p+1=\sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1} \quad ――③$$

二項係数 ${}_pC_{2k-1}$ は p の倍数であるから、③の右辺は p の倍数であるが、③の左辺 $p+1$ は p の倍数ではない。

したがって③は成立しない。

$b=p$ のとき

$$p^{p-1}+p=\sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}p^{2k-2} \quad \therefore p^{p-2}+1=\sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k {}_pC_{2k-1}p^{2k-3} \quad ――④$$

④の右辺は p の倍数であるが、④の左辺 $p^{p-2}+1$ は p の倍数ではない。したがって④は成立しない。

以上により、$(a+bi)^p$ の虚数部分は 0 にならず、$(a+bi)^p$ は実数ではない。（証明終）