2001 年京大後期文 $\boxed{3}$

C_1 上の点 $P(t,\ t^3+2t^2+2)$ における接線 L は

$$y=(3t^2+4t)(x-t)+t^3+2t^2+2=(3t^2+4t)x-2t^3-2t^2+2$$

$3x^2=(3t^2+4t)x-2t^3-2t^2+2$ とすると　$3x^2-(3t^2+4t)x+2t^3+2t^2-2=0$ ——①

$$D=(3t^2+4t)^2-12(2t^3+2t^2-2)=9t^4+24t^3+16t^2-24t^3-24t^2+24=9t^4-8t^2+24$$

$$=9\left(t^2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{200}{9}>0$$

L と C_2 は、相違なる 2 つの交点を持つ。①の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

L と C_2 で囲まれる図形の面積は　$S=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=3\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=\frac{3t^2+4t}{3},\ \alpha\beta=\frac{2t^3+2t^2-2}{3}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{D}{9}=\left(t^2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{200}{81}\qquad \therefore S=\frac{1}{2}\left\{\left(t^2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{200}{81}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

求める最小値は、$t^2=\frac{4}{9}$、$t=\pm\frac{2}{3}$ のとき　$\frac{1}{2}\left(\frac{200}{81}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{10\sqrt{2}}{9}\right)^3=\frac{1000\sqrt{2}}{729}$ ……(答)