

2001 年京大文 [2]

原点 O を基準とした、4 点の位置ベクトルを考える。このとき、 $k \neq m$ であれば

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{OP_m} - \overrightarrow{OP_k}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OP_m} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{OP_k} \cdot \vec{v} \neq 0 \quad \therefore \overrightarrow{OP_m} \cdot \vec{v} \neq \overrightarrow{OP_k} \cdot \vec{v}$$

これより、4 つの値 $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{v}$, $\overrightarrow{OP_2} \cdot \vec{v}$, $\overrightarrow{OP_3} \cdot \vec{v}$, $\overrightarrow{OP_4} \cdot \vec{v}$ は、すべて異なる。

すなわち、最小値がただ 1 つだけ存在する。

例えば、 $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{v}$ が最小であるとき、 $k=2, 3, 4$ について、 $\overrightarrow{P_k P_1} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{OP_k} \cdot \vec{v} < 0$ が成立する。

以上により、題意は示された。(証明終)

(注)

一見、理系 [4] の方が大変そうだが、空間内の 6 点は正八面体の頂点であると指定しており、座標を置くなど

図形的に考えることもできる。本問は具体的な指定が一切なく、実は理系 [4] より考えにくい。