

2001 年京大文 5

P の座標を (a, b) とする。ただし、 $(a, b) \neq (0, 0)$ である。

P は D に含まれるから $\therefore -1 < b < 1$

円 C が原点を通るから、半径は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である。

P と $y=1, y=-1$ との距離は、それぞれ $1-b, b+1$ であるから、 C の半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ との間に以下が成り立つ。

$$1-b \geq \sqrt{a^2 + b^2}, b+1 \geq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1-b)^2 \geq a^2 + b^2, (b+1)^2 \geq a^2 + b^2$$

$$-2b+1 \geq a^2, 2b+1 \geq a^2 \quad \therefore \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} \leq b \leq -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}$$

P の存在範囲は、 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ から

$(0, 0)$ を除いた部分であり、右図の通り。

境界線を含む。

面積は

$$2 \times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \dots\dots (\text{答})$$

