2001 年京大文 5

Pの座標を(a, b)とする。ただし、 $(a, b) \neq (0, 0)$ である。

PはDに含まれるから :-1<b<1

円Cが原点を通るから、半径は $\sqrt{a^2+b^2}$ である。

Pとy=1, y=-1との距離は、それぞれ1-b, b+1であるから、Cの半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ との間に以下が成り立つ。

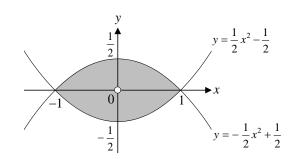
$$1-b \ge \sqrt{a^2+b^2}$$
, $b+1 \ge \sqrt{a^2+b^2}$ $(1-b)^2 \ge a^2+b^2$, $(b+1)^2 \ge a^2+b^2$

$$-2b+1 \ge a^2$$
, $2b+1 \ge a^2$ $\therefore \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} \le b \le -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}$

Pの存在範囲は、 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ から

(0,0)を除いた部分であり、右図の通り。

境界線を含む。



面積は

$$2 \times \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^{2}) dx = 2 \int_{0}^{1} (1 - x^{2}) dx = 2 \left[x - \frac{x^{3}}{3} \right]_{0}^{1} = \frac{4}{3} \cdots (5)$$