2001年京大後期理 $\boxed{2}$

$g_n(x)=(1-x)f_n(x)=(1-x^2)f_{n-1}(x^2)=g_{n-1}(x^2)$ より

$g_1(x)=(1-x)f_1(x)=1-x \quad g_2(x)=g_1(x^2)=1-x^2 \quad g_3(x)=g_2(x^2)=1-(x^2)^2=1-x^4$

$g_n(x)=1-x^{2^{n-1}}$ と予想できる。$n=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$g_k(x)=1-x^{2^{k-1}}$ と仮定すると $\quad g_{k+1}(x)=1-(x^2)^{2^{n-1}}=1-x^{2^k}$

したがって、$n=k+1$ でも成立するので $\quad \therefore g_n(x)=1-x^{2^{n-1}}$ ……(答)

$g_n(x)=1-x^{2^{n-1}}=(1-x)(1+x+\cdots+x^{2^{n-1}-1})$ より $\quad \therefore f_n(x)=1+x+\cdots+x^{2^{n-1}-1}$

$f_n(1)=2^{n-1}$ より、$x=1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} f_n(1)$ は発散する。

$x\neq 1$ のとき $\quad f_n(x)=\dfrac{1-x^{2^{n-1}}}{1-x}$ であるから

$-1<x<1$ のとき $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$x=-1$ のとき $\quad f_n(-1)=\dfrac{1-(-1)^{2^{n-1}}}{2} \quad n\to\infty$ について考えるので、2^{n-1} は偶数である。 $\quad \therefore \lim_{n\to\infty} f_n(-1)=0$

$x<-1,\ 1<x$ のとき $\quad f_n(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-x^{2^{n-1}-1}}{\frac{1}{x}-1} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は発散する。

以上により、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が収束する x の範囲は $\quad \therefore -1\leqq x<1$ ……(答)