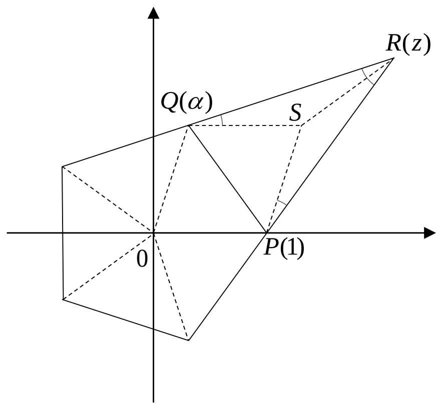
2001年京大後期理$\boxed{3}$文$\boxed{4}$共通

(1)



複素数平面上で、$1, \alpha$ を表す点を P, Q とし、z を表す点を R とする。
直線 PQ に関し、原点 O と対称な点を S とする。

$\angle PQR=\angle QPR=\frac{2}{5}\pi,\ \angle PRQ=\frac{\pi}{5},\ \angle PQS=\angle QPS=\frac{3}{10}\pi$ より

$$\angle SPR=\angle QPR-\angle QPS=\frac{\pi}{10}\quad \therefore \angle SPR=\angle SRP=\frac{\pi}{10}\quad \therefore PS=RS=1$$

同様に、$\angle SQR=\angle SRQ=\frac{\pi}{10}$、$QS=RS=1$ である。

これより、S が表す複素数は $\alpha+1$ であり、$\overrightarrow{SR}$ が表す複素数は $\alpha+1$ の定数倍かつ大きさが1であるから

$$\therefore z=\alpha+1+\frac{\alpha+1}{|\alpha+1|}=\left(1+\frac{1}{|\alpha+1|}\right)(\alpha+1)\ \cdots\cdots(答)$$

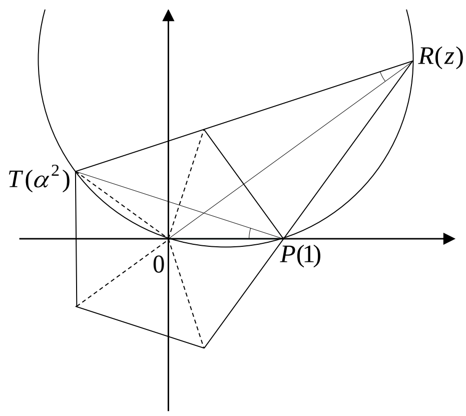
または、$\alpha+1=\cos\frac{2}{5}\pi+1+i\sin\frac{2}{5}\pi=2\cos^2\frac{\pi}{5}+2i\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ より

$$|\alpha+1|=2\cos\frac{\pi}{5}\quad \therefore z=\left(1+\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{5}}\right)(\alpha+1)\ \cdots\cdots(答)$$

または、$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$（計算は省略）であるから

$$\therefore z=\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)(\alpha+1)=\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)(\alpha+1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\alpha+1)\ \cdots\cdots(答)$$

(2)



α^2 を表す点を T とする。O, P, T を通る円を考える。

$OP=OT$ より　$\angle OPT=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{4}{5}\pi\right)=\frac{\pi}{10}$

一方、(1)より $\angle ORT=\frac{\pi}{10}$ であるから、円周角の定理により、
R は O, P, T を通る円上の点である。
したがって、題意は示された。（証明終）

※(1)の z の表し方は、色々考えられるが、迷うなら直接計算した方が簡単。
　理系と文系の違いは、角度の表記がラジアンか度数法かだけである。