

2002 年京大後期文 2

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y), \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{ より}$$

$$\begin{aligned} F &= -2(x+y)^3 + 6xy(x+y) + 3(x+y)^2 - 6xy - 6xy(x+y) + 6xy + 12(x+y) - 5 \\ &= -2(x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 12(x+y) - 5 \end{aligned}$$

$x+y$  がとり得る範囲を調べる。  $x+y=k$  とおくと、  $y=k-x$  である。

領域  $D$  を図示すると右図の通りで、境界線を含む。

$k$  が最大になるのは  $(2, 2)$  を通るときで、最小になるのは  $(-1, -1)$  を通るとき。

$$\therefore -2 \leq k \leq 4$$

$f(k) = -2k^3 + 3k^2 + 12k - 5$  とおき、  $-2 \leq k \leq 4$  における増減を調べる。

$$f'(k) = -6k^2 + 6k + 12 = -6(k^2 - k - 2) = -6(k+1)(k-2)$$

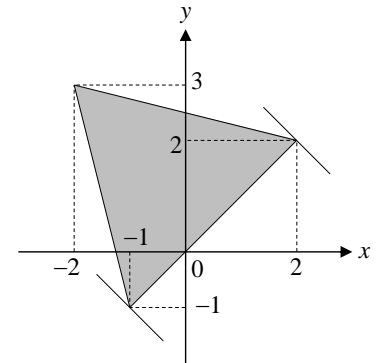
増減は右の通りで、  $k = -1$  で極小、  $k = 2$  で極大。

$$f(-1) = 2 + 3 - 12 - 5 = -12$$

$$f(2) = -16 + 12 + 24 - 5 = 15$$

$$f(-2) = 16 + 12 - 24 - 5 = -1$$

$$f(4) = -128 + 48 + 48 - 5 = -37$$



$k$	-2	...	-1	...	2	...	4
$f'(k)$		-	0	+	0	-	0
$f(k)$		↘		↗		↘	

$F$  の最大値は15、最小値は-37 ……(答)