

2002 年京大後期文 5

$\vec{BA} = (1, -1, 1)$ であるから、線分 BA 上の点は
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \text{--- ①}$$

線分 BA と、平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq 1$) との交点は、 $(t, 1-t, t)$ であるから

この交点と z 軸との距離は $\sqrt{t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$

題意の立体の、平面 $z=t$ ($0 \leq t \leq 1$) による断面は、半径 $\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$ の円であるから、求める体積は

$$\pi \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1) dt = \pi \left[\frac{2}{3} t^3 - t^2 + t \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi \quad \dots\dots (\text{答})$$