2002 年京大文 $\boxed{4}$

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\cos 3\theta - \cos 2\theta + 3\cos\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - (2\cos^2\theta - 1) + 3\cos\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta = a$$

$f(t) = 4t^3 - 2t^2$ とし、$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で、$y = f(t)$ のグラフと、$y = a$ の共有点の個数を考える。

$f'(t) = 12t^2 - 4t = 4t(3t-1)$ より、

$f(t)$ の増減は右の通り。

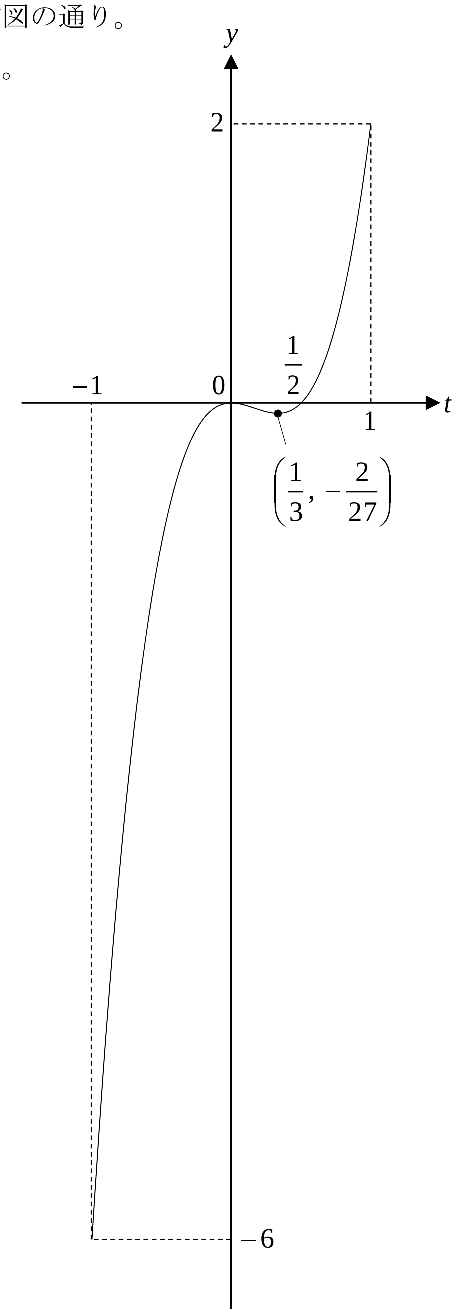
t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$		↗		↘		↗	

極大値は $f(0) = 0$　極小値は $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} - \frac{2}{9} = -\frac{2}{27}$

$f(-1) = -6,\ f(1) = 2$ より、$-1 \leqq t \leqq 1$ における $y = f(t)$ のグラフは、右図の通り。

$t = \cos\theta$ を満たす θ の個数は、$t = \pm 1$ のとき 1 個、$-1 < t < 1$ のとき 2 個。

これを踏まえて、a が変化したときの、解 θ の個数は



$a < -6,\ 2 < a$ のとき　0 個

$a = -6,\ 2$ のとき　1 個

$-6 < a < -\frac{2}{27},\ 0 < a < 2$ のとき　2 個　……(答)

$a = -\frac{2}{27},\ 0$ のとき　4 個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき　6 個