2002年京大後期理 $\boxed{2}$

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ——① $(x-a)^2+y^2=b$ ——②

①より、$y^2=4(1-x^2)$ であるから、②に代入すると

$(x-a)^2+4(1-x^2)=x^2-2ax+a^2+4-4x^2=-3x^2-2ax+a^2+4=b$

$3x^2+2ax+b-a^2-4=0$ ——③

$y^2=4(1-x^2)\geqq 0$ より、$-1\leqq x\leqq 1$ であるから、③が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を持つ必要がある。

③が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に1つだけ実数解を持つとする。その解を $x=p$ とすると

$p=\pm 1$ のとき $y^2=0$ $y=0$ ①、②を満たす $(x,\ y)$ は、1組だけである。

$-1<p<1$ のとき $y^2=4(1-p^2)$ $y=\pm 2\sqrt{1-p^2}$ ①、②を満たす $(x,\ y)$ は、2組だけである。

いずれにしても不適であり、③が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に2つの相違なる実数解を持つ必要がある。

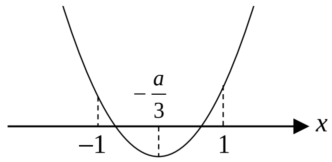
$x=\pm 1$ に対しては、対応する y は $y=0$ のみであるから、③が $-1<x<1$ の範囲に2つの相違なる実数解を持つ条件を考える。$f(x)=3x^2+2ax+b-a^2-4=3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2+b-\dfrac{4}{3}a^2-4$ とすると

軸について $-1<-\dfrac{a}{3}<1$ $\therefore -3<a<3$ ——④

$f(-1)>0$ より $3-2a+b-a^2-4=b-(a+1)^2>0$ $\therefore b>(a+1)^2$ ——⑤

$f(1)>0$ より $3+2a+b-a^2-4=b-(a-1)^2>0$ $\therefore b>(a-1)^2$ ——⑥

$f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=b-\dfrac{4}{3}a^2-4<0$ より $\therefore b<\dfrac{4}{3}a^2+4$ ——⑦



以上により

$\therefore -3<a<3,\ b>(a+1)^2,\ b>(a-1)^2,\ b<\dfrac{4}{3}a^2+4$

図示すると右図の通りで、境界線は含まない。