2002 年京大後期理 5

(1)

$$a_{n+1}{}^2-2b_{n+1}{}^2=(a_n{}^2+2b_n{}^2)^2-2(2a_nb_n)^2=a_n{}^4+4a_n{}^2b_n{}^2+4b_n{}^4-8a_n{}^2b_n{}^2$$
$$=a_n{}^4-4a_n{}^2b_n{}^2+4b_n{}^4=(a_n{}^2-2b_n{}^2)^2$$

$a_1{}^2-2b_1{}^2=9-8=1$ であるから　$a_2{}^2-2b_2{}^2=1^2=1$　$a_3{}^2-2b_3{}^2=1^2=1$
以下、帰納的に　$\therefore a_n{}^2-2b_n{}^2=1$ ……(答)

(2)
$a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}=a_n{}^2+2b_n{}^2+2\sqrt{2}a_nb_n=(a_n+\sqrt{2}b_n)^2$ より
$c_n=a_n+\sqrt{2}b_n$ とすると　$c_{n+1}=c_n{}^2$　$\log c_{n+1}=2\log c_n$
$\{\log c_n\}$ は公比 2 の等比数列であり、$\log c_1=\log(3+2\sqrt{2})=\log(1+\sqrt{2})^2=2\log(1+\sqrt{2})$ であるから

$$\log c_n=2^{n-1}\cdot 2\log(1+\sqrt{2})=2^n\cdot\log(1+\sqrt{2})=\log(1+\sqrt{2})^{2^n}\qquad \therefore c_n=a_n+\sqrt{2}b_n=(1+\sqrt{2})^{2^n}$$

$a_n{}^2-2b_n{}^2=1$ より　$a_n-\sqrt{2}b_n=\dfrac{1}{a_n+\sqrt{2}b_n}=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^{2^n}}=(-1+\sqrt{2})^{2^n}$

$a_n,\ b_n$ について解くと　$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{(1+\sqrt{2})^{2^n}+(-1+\sqrt{2})^{2^n}\right\},\ b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(1+\sqrt{2})^{2^n}-(-1+\sqrt{2})^{2^n}\right\}$

$$\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^{2^n}+(-1+\sqrt{2})^{2^n}}{(1+\sqrt{2})^{2^n}-(-1+\sqrt{2})^{2^n}}=\sqrt{2}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{-1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}}{1-\left(\dfrac{-1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}}=\sqrt{2}\cdot\frac{1+(-1+\sqrt{2})^{2^{n+1}}}{1-(-1+\sqrt{2})^{2^{n+1}}}$$

したがって　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{2}$ ……(答)

(注)
(2) は、$a_n,\ b_n$ を求めなくても解ける。
$a_n{}^2-2b_n{}^2=1$ より、$\dfrac{a_n{}^2}{b_n{}^2}=2+\dfrac{1}{b_n{}^2}$ であるから、$b_n\to\infty$ (証明略) より $\dfrac{a_n{}^2}{b_n{}^2}\to 2$ を導く方が簡潔である。