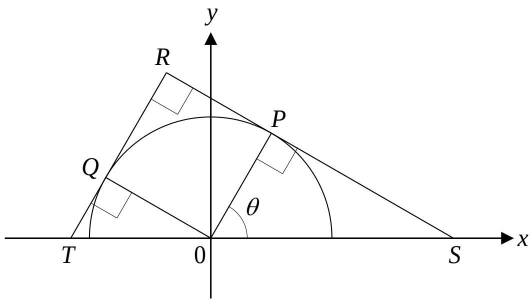
2003 年京大後期文 $\boxed{3}$

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。



P における C の接線と、Q における C の接線の交点を R とする。

P における C の接線と、x 軸の交点を S とし、

Q における C の接線と、x 軸の交点を T とする。

$\angle POQ$ が直角であるから、$\angle PRQ$ も直角である。

四角形 $OPRQ$ は一辺の長さが1の正方形である。

$PS=\tan\theta$ であり、相似性より、$QT=1\times\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

三角形 RST の面積は　$1\times1+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\theta+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)+1$

ここで、相加平均・相乗平均の関係により　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\geqq2\sqrt{\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}}=2$

等号成立は　$\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$　$\tan^2\theta=1$　$\tan\theta=1$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって、三角形 RST の面積が最小になるのは、$P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ Q\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のときである。

最小値は　$\dfrac{1}{2}\cdot2+1=2$　……(答)