2003年京大後期文 5

(1)

$S_n = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$ とすると

$$S_n - zS_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = \frac{1-z^n}{1-z} - nz^n = -n \ (\because z^n = 1)$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{z-1}$$

したがって、(エ)に等しい。……(答)

(2)

$z = \cos 40^\circ + i\sin 40^\circ = e^{i40^\circ}$ とすると、(1)より

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 9z^8 = 1 + 2e^{i40^\circ} + 3e^{i80^\circ} + \cdots + 9e^{i320^\circ} = \frac{9}{e^{i40^\circ} - 1} \quad \text{——①}$$

ここで

$$\frac{9}{e^{i40^\circ}-1} = \frac{9}{\cos 40^\circ - 1 + i\sin 40^\circ} = \frac{9}{-2\sin^2 20^\circ + 2i\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = -\frac{9}{2\sin 20^\circ} \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ - i\cos 20^\circ}$$
$$= -\frac{9(\sin 20^\circ + i\cos 20^\circ)}{2\sin 20^\circ} = -\frac{9}{2} - i\frac{9}{2\tan 20^\circ}$$

①の虚数部分を比較すれば

$$\therefore 2\sin 40^\circ + 3\sin 80^\circ + \cdots + 9\sin 320^\circ = -\frac{9}{2\tan 20^\circ}$$ (証明終)