2003年京大文 $\boxed{1}$

$\frac{23}{111}=0.207207\cdots$ より、i を自然数として、 $a_{3i-2}=2,\ a_{3i-1}=0,\ a_{3i}=7$ である。

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ とすると

$n=3i-2$ のとき

$$S_n=2\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{3^{3j-2}}+7\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{3^{3j}}=18\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{1}{27}\right)^j+7\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{1}{27}\right)^j=25\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{1}{27}\right)^j-7\left(\frac{1}{27}\right)^i$$

$$=\frac{25}{27}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{27}\right)^i}{1-\frac{1}{27}}-7\left(\frac{1}{27}\right)^i=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^i\right\}-7\left(\frac{1}{27}\right)^i=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{27}\right)^i$$

$$=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{n+2}{3}}=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$S_1=\frac{2}{3}$ であり、$\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\cdot\frac{1}{3}=\frac{75-23}{78}=\frac{52}{78}=\frac{2}{3}$ であるから、$n=1$ でも成立。

$n=3i-1$ のとき

$a_{3i-1}=0$ であるから、$S_{3i-1}=S_{3i-2}=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{27}\right)^i$ である。

$$S_n=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{n+1}{3}}=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$n=3i$ のとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{3i-1}\frac{a_k}{3^k}+\frac{7}{3^{3i}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^i\right\}-7\left(\frac{1}{27}\right)^i+7\left(\frac{1}{27}\right)^i=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3i}\right\}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

以上により

$n=3i-2$ のとき $S_n=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^n$、$n=3i-1$ のとき $S_n=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$、$n=3i$ のとき $S_n=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

……(答)