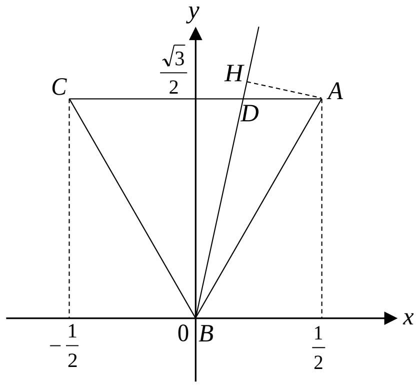
2003年京大後期理 $\boxed{2}$



座標平面上で、 $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B(0,\ 0),\ C\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする。

$AD=t\ (0<t<1)$ とする。 $t\neq\frac{1}{2}$ のとき、直線 BD の傾きは $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-t}=\dfrac{\sqrt{3}}{1-2t}$

直線 BD の式は $y=\dfrac{\sqrt{3}}{1-2t}x$ $\quad \sqrt{3}x+(2t-1)y=0$ これは $t=\frac{1}{2}$ でも成立。

A から直線 BD に下ろした垂線の足を H とする。

直線 BD を軸に、A を回転させると、四面体 $ABCD$ の体積が最大になるのは、 AH が座標平面と垂直になったときである。

$$AH=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2t-1)\right|}{\sqrt{3+(2t-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2-4t+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

また、正三角形 ABC の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから、△ BCD の面積は、 $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)$ である。

t を固定したとき、四面体 $ABCD$ の体積の最大値は $S=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-t)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{t(1-t)}{8\sqrt{1-t(1-t)}}$

$X=t(1-t)$ とおくと $X=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ $\quad 0<t<1$ より $\quad \therefore 0<X\leqq\frac{1}{4}$

$S(X)=\dfrac{X}{8\sqrt{1-X}}$ とすると $S'(X)=\dfrac{1\cdot\sqrt{1-X}-X\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-X}}\right)}{8(1-X)}=\dfrac{2(1-X)+X}{16(1-X)^{3/2}}=\dfrac{2-X}{16(1-X)^{3/2}}>0$

$0<X\leqq\frac{1}{4}$ において、$S(X)$ は単調増加であるから、 $X=\frac{1}{4}$ のとき最大となる。

$X=\frac{1}{4}$ のとき、$t=\frac{1}{2}$ である。最大値は $S\left(\frac{1}{4}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}}{8\sqrt{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{16\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{48}$

四面体 $ABCD$ の体積を最大にする D の位置は、 AC の中点であり、そのときの最大値は $\frac{\sqrt{3}}{48}$ ……(答)

※結論は容易に予想できるが、変数のおき方に悩む。三角関数で処理するのは困難。

　t の式として微分してもよい。