2003年京大後期理 $\boxed{4}$

$a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$ を満たす n が存在しないと仮定する。

このとき、すべての n について $a_{n+1} \leqq \frac{1}{2}a_n - p$ が成り立つから

$$a_{n+1} + 2p \leqq \frac{1}{2}(a_n + 2p) \qquad a_n + 2p \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 + 2p)$$

$a_n > 0,\ p > 0$ であるから　$0 < a_n + 2p \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 + 2p)$

はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(a_n + 2p) = 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = -2p < 0$

これは $a_n > 0$ に矛盾する。したがって、$a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$ を満たす n が存在する。（証明終）