2003 年京大後期理 5

（解答 1） 二項展開で押し切る

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^{100}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}\left(\frac{2i}{2n}\right)^{100}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{i}{n}\right)^{100}-\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{100}\right\}$$

$$\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{100}=\left(\frac{i}{n}\right)^{100}+{}_{100}C_{99}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}\left(-\frac{1}{2n}\right)+{}_{100}C_{98}\left(\frac{i}{n}\right)^{98}\left(-\frac{1}{2n}\right)^{2}+\cdots+{}_{100}C_{1}\left(\frac{i}{n}\right)\left(-\frac{1}{2n}\right)^{99}+\left(-\frac{1}{2n}\right)^{100}$$

$$=\left(\frac{i}{n}\right)^{100}-50\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}+\sum_{j=1}^{98}\left({}_{100}C_j\left(\frac{i}{n}\right)^j\left(-\frac{1}{2n}\right)^{100-j}\right)+\frac{1}{2^{100}n^{100}}$$

$$\left(\frac{i}{n}\right)^{100}-\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{100}=50\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}-\sum_{j=1}^{98}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{100-j}{}_{100}C_j\,\frac{1}{n^{100-j}}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^j\right)-\frac{1}{2^{100}n^{100}}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}=50\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}-\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{98}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{100-j}{}_{100}C_j\,\frac{1}{n^{100-j}}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^j\right)\right\}-\frac{1}{2^{100}n^{99}}$$

$$=50\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}-\sum_{j=1}^{98}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{100-j}{}_{100}C_j\,\frac{1}{n^{100-j}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^j\right\}-\frac{1}{2^{100}n^{99}}$$

ここで、$1\leqq j\leqq 98$のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{100-j}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{99-j}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^j$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^j=\int_0^1 x^j dx=\left[\frac{x^{j+1}}{j+1}\right]_0^1=\frac{1}{j+1}$ であるから $\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{100-j}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^j=0$

したがって

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}=50\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}=50\int_0^1 x^{99}dx=50\left[\frac{x^{100}}{100}\right]_0^1=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

（解答 2） 平均値の定理の利用

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ とすると

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^{100}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}\left(\frac{2i}{2n}\right)^{100}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{2i}{2n}\right)^{100}-\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^{100}\right\}$$

$f(x)=x^{100}$ とすると、 $f'(x)=100x^{99}$ である。区間 $\dfrac{2i-1}{2n}\leqq x\leqq\dfrac{2i}{2n}$ において、平均値の定理により、以下を満たす実数 c_i が存在する。

$$\frac{f\left(\frac{2i}{2n}\right)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)}{\frac{2i}{2n}-\frac{2i-1}{2n}}=2n\left\{\left(\frac{2i}{2n}\right)^{100}-\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^{100}\right\}=f'(c_i)=100c_i^{99} \quad \frac{2i-1}{2n}\leqq c_i \leqq \frac{2i}{2n}$$

$\left(\frac{2i}{2n}\right)^{100}-\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^{100}=\frac{50}{n}c_i^{99}$ であるから　$S_n=\frac{50}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i^{99}$

$\frac{2i-2}{2n}<\frac{2i-1}{2n}\leqq c_i \leqq \frac{2i}{2n}$ であるから　$\frac{50}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{99}<S_n\leqq\frac{50}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{99}$

区分求積法およびはさみうちの原理により　$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=50\int_0^1 x^{99}dx=50\left[\frac{x^{100}}{100}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ ……(答)

※出題者の想定した解答は、(解答 2)と思われる。