2003 年京大理 $\boxed{2}$

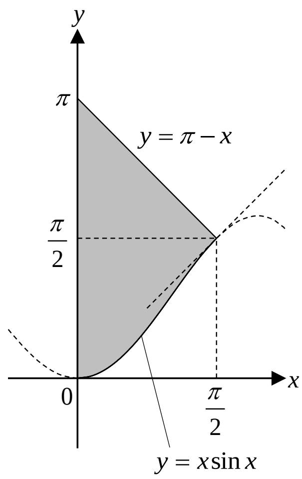
$f(x)=x\sin x \qquad f'(x)=\sin x+x\cos x$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$x \geqq 0,\ \sin x \geqq 0,\ \cos x \geqq 0$ であるから、$f'(x) \geqq 0$ であり、

$f(x)$ は単調増加。

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ であるから、$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ における、$y=f(x)$ の法線は

$$y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=-x+\pi$$



求める体積は $\quad \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 xdx$

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)^2dx=\pi\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{24}\right)=\frac{7}{24}\pi^4$$

$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 xdx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(1-\cos 2x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2xdx$ であるから

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^4}{48}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2xdx\right)=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2xdx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right)=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi^2}{8}$$

以上により、求める体積は $\quad \dfrac{7}{24}\pi^4-\left(\dfrac{\pi^4}{48}+\dfrac{\pi^2}{8}\right)=\dfrac{13}{48}\pi^4-\dfrac{\pi^2}{8}$ ……(答)