

2003 年京大理 4

$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ とする。 $x^2 + x + 1 = 0$ を解くと、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおくと、 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ であり、 $\omega^3 = 1$ である。

$f(\omega) = f(\omega^2) = 0$ であれば、 $f(x)$ は $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$ で割り切れる。

$$\begin{aligned} f(\omega) &= ((\omega^3)^{33} \cdot \omega + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 = (\omega + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 = \omega^{200} + \omega^{100} + 1 = (\omega^3)^{66} \cdot \omega^2 + (\omega^3)^{33} \cdot \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$f(\omega^2) = ((\omega^3)^{66} \cdot \omega^2 + 1)^{100} + (\omega^3 \cdot \omega + 1)^{100} + 1 = (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{100} + 1 = f(\omega) = 0$$

したがって、 $f(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れる。……(答)