2003 年京大理 $\boxed{5}$

$B=rE+sA$ とすると

$r=s=0$ のとき　B は零行列である。

$r=0,\ s\neq 0$ のとき　$B=sA=\begin{pmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{pmatrix}$ であるから　$\det B=(ad-bc)s^2\neq 0$　$\therefore ad-bc\neq 0$ ——①

$r\neq 0,\ s=0$ のとき　$B=rE$ であるから、B は逆行列 $B^{-1}=\dfrac{1}{r}E$ を持つ。

$r\neq 0,\ s\neq 0$ のとき　$B=rE+sA=\begin{pmatrix} sa+r & sb \\ sc & sd+r \end{pmatrix}$ であるから

$a=d=-\dfrac{r}{s},\ b=c=0$ のとき　B は零行列である。

$a=d\neq -\dfrac{r}{s},\ b=c=0$ のとき　$B=(sa+r)E$ であるから、B は逆行列 $B^{-1}=\dfrac{1}{sa+r}E$ を持つ。

上記以外のとき　$\det B=(sa+r)(sd+r)-bcs^2=r^2+(a+d)sr+(ad-bc)s^2\neq 0$

両辺を s^2 で割ると　$\left(\dfrac{r}{s}\right)^2+(a+d)\dfrac{r}{s}+(ad-bc)\neq 0$

$\det B\neq 0$ となる条件は、2 次方程式 $t^2+(a+d)t+(ad-bc)=0$ が、実数解を持たないことであるから

$D=(a+d)^2-4(ad-bc)<0$　$\therefore (a+d)^2<4(ad-bc)$ ——②

ここで、$ad-bc=0$ のとき、$(a+d)^2<0$ は成り立たないから、①は②に含まれる。

以上により、求める必要十分条件は　$a=d$ かつ $b=c=0$　または　$(a+d)^2<4(ad-bc)$　……(答)

※ A が単位行列 E の定数倍である場合を、見落としやすい。