2004 年京大文 $\boxed{5}$

(1)

右辺 2^n は偶数である。a^2 と b^2 の奇偶が異なるとき、左辺は奇数であるから、a^2 と b^2 の奇偶は一致する。
a^2 と b^2 がともに奇数のとき、a と b がともに奇数であるから、$a=2m+1,\ b=2n+1$ とすると

$$a^2+b^2=4(m^2+m+n^2+n)+2=2^n$$

$$2(m^2+m+n^2+n)+1=2^{n-1}$$

このとき、右辺 2^{n-1} は偶数であるが、左辺は奇数であるから、不適。
したがって、a と b はともに偶数である。(証明終)

(2)

$a<b$ のとき

$2a^2<2^n<2b^2$ より　$a^2<2^{n-1}<b^2$　$b^2\leqq a^2+b^2=2^n$ であるから　$\therefore 2^{n-1}<b^2\leqq 2^n$ ——①

n が偶数のとき、①を満たす平方数 b^2 は 2^n のみであるから

$\therefore a=0,\ b=2^{\frac{n}{2}}$　対称性より　$\therefore (a,\ b)=(0,\ 2^{\frac{n}{2}}),\ (2^{\frac{n}{2}},\ 0)$

n が奇数のとき、2^{n-1} の次に小さい平方数は 2^{n+1} であるから、①を満たす平方数 b^2 は存在しない。

$a=b$ のとき

$2a^2=2^n$ より　$a^2=b^2=2^{n-1}$ ——②

n が偶数のとき、②を満たす平方数 $a^2,\ b^2$ は存在しない。

n が奇数のとき　$\therefore (a,\ b)=(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}})$

以上により　n が奇数のとき $(a,\ b)=(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}})$、$n$ が偶数のとき $(a,\ b)=(0,\ 2^{\frac{n}{2}}),\ (2^{\frac{n}{2}},\ 0)$ ……(答)